II CONCURSO DE MATEMÁTICA BINARIA 2012

Segundo y Tercero de Secundaria

Primera Parte

De los problemas del 1 al 15 escoge una alternativa. Sólo una es la correcta.

1. En la final de los 200 metros planos, sólo corrieron cinco competidores: Bernardo, Diego, Ernesto, Antonio y Carlos. Se observó lo siguiente:

   - Antonio no fue ni el primero ni el último.
   - Antonio llegó a la meta antes que Bernardo.
   - Carlos corrió más rápido que Diego.
   - Ernesto fue más rápido que Antonio, pero fue más lento que Diego.

   ¿Quién quedó en tercer lugar?

   (A) Antonio (B) Bernardo (C) Carlos (D) Diego (E) Ernesto

2. Se escriben en una lista todos los números cuyo producto de dígitos es igual a 12. La lista empieza con los números:

   $$26, 34, 43, 62, 126, 134, \ldots$$

   Es claro que el número 612 es parte de esa lista, ¿cuál es la diferencia del número que está inmediatamente después de 612 en la lista, con el número que está inmediatamente antes?

   (A) 340 (B) 208 (C) 200 (D) 190 (E) 210

3. ¿Cuántos ángulos obtusos, como máximo, puede tener un cuadrilátero?

   Aclaración: Un ángulo obtuso es aquel ángulo mayor que 90° y menor que 180°.

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 0

4. Si p y q son números reales diferentes tales que

   $$\begin{aligned} p(p+q) &= 8, \\ p - \frac{1}{p} &= q - \frac{1}{q}, \end{aligned}$$

   calcule el valor de p^2.

   (A) 1 (B) $\frac{1}{9}$ (C) 9 (D) 0 (E) 4

5. ¿A qué hora del día sábado se verifica que la fracción transcurrida de ese día es igual a la fracción transcurrida de la semana?

   Aclaración: La semana comienza el día lunes.

   (A) 8:00 am (B) 10:00 am (C) 12: 00 m (D) 4:00 pm (E) 8:00 pm

6. Al inicio tenemos un tablero de 2×2 que tiene escrito un número 1 en cada cuadradito. Una operación consiste en escoger dos cuadraditos que compartan un lado y sumar 1 a cada uno de los números que están en esos cuadraditos. Luego de realizar varias operaciones, ¿cuál de los siguientes tableros **no** podemos obtener?

1	1
1	1

(A)

11	11
1	1

(B)

13	26
2	15

(C)

100	102
101	103

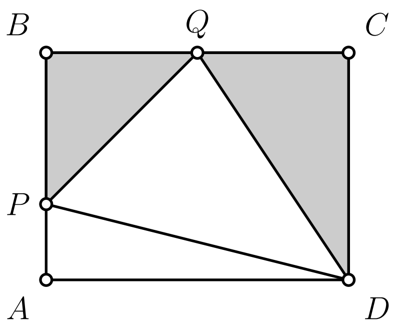
(D)

71	66
60	54

(E)

25	39
11	25

7. En la figura se muestra un rectángulo $ABCD$ tal que $BC = 8$ y $CD = 6$. En los lados AB y BC se han tomado los puntos P y Q, respectivamente, tales que $BP = BQ$. Si el área del triángulo PQD es igual a la suma de las áreas de las regiones sombreadas, calcula el área del triángulo APD.



   (A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

8. ¿Cuál es el menor entero positivo por el cual hay que multiplicar a 150 para obtener un cubo perfecto? Dé como respuesta el resto de dividir dicho número entre 11.

   (A) 2 (B) 10 (C) 6 (D) 4 (E) 7

9. Si n es el doble de un número primo impar, determine cuántos divisores tiene el número n^n.

   (A) n^2 (B) $(n+1)^2$ (C) $2n$ (D) $8n+1$ (E) $(n+1)^3$

10. Para cada entero positivo n, sea d_n el dígito de las unidades de n^3. Calcule el dígito de las unidades del número:

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{102}.$$

   (A) 1 (B) 9 (C) 4 (D) 6 (E) 5

11. La ecuación cuadrática $x^2 + 4x - 3 = 0$ tiene raíces x_1 y x_2. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos
$$S_n = n(x_1^n + x_2^n).$$
Calcula el valor de $\dfrac{S_5}{S_3 - S_4}$.

(A) 6 (B) 2 (C) 4 (D) 3 (E) 5

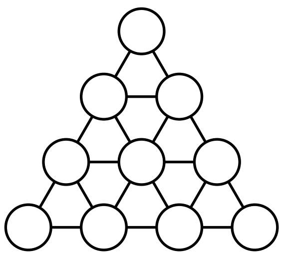
12. Sea N el menor número natural que tiene 131 dígitos, es múltiplo de 11, y cumple que al multiplicar sus dígitos se obtiene un número mayor que 3. Determine la suma de los dígitos de N.

(A) 131 (B) 132 (C) 133 (D) 134 (E) 135

13. Al simplificar la fracción:
$$\frac{437^2 + 319^2}{3 \times (378^2 + 59^2)}$$
se obtiene la fracción $\frac{m}{n}$, donde el máximo común divisor de m y n es 1. Determine el valor de $(n - m)^2 + (n + m)$.

(A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 10 (E) 4

14. Pedro escribe un entero positivo en cada uno de los círculos de tal forma que los números en los círculos conectados deber ser diferentes. ¿Cuál es la menor suma posible de los diez números escritos por Pedro?



(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22

15. Se tiene 14 bolillas enumeradas del 1 al 14. Estas bolillas deben ser distribuidas en n cajas de tal forma que cada caja contenga al menos 2 bolillas, y además en ninguna caja debe haber dos bolillas cuyos números difieran en un número primo. Determine el menor valor de n para el cual la situación descrita sea posible.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Segunda Parte

Para cada una de las siguientes preguntas, escribe de forma nítida tu respuesta en el cuadro correspondiente.

16. ¿Cuál es el menor cuadrado perfecto que empieza con 5?

17. Si $2^a = 5$ y $25^b = 8$, calcule el valor de $\left(\frac{9}{a}\right) \cdot \left(\frac{9}{b}\right)$

18. Fabiana escogió n números naturales consecutivos tales que cada uno tiene 3 dígitos. Al multiplicar esos números obtuvo un múltiplo de 190^2, ¿cuál es el menor valor posible de n para que esto ocurra?

19. Un entero positivo es llamado *ternario* si todos sus dígitos son menores que 3. Por ejemplo, 11, 100, y 2012 son ternarios. ¿Cuántos enteros positivos n de siete dígitos cumplen que n y $n + 89$ son números ternarios?

20. De lunes a viernes, Andrea recoge a su hijo Pepito del colegio y lo lleva en su auto a casa. Ella sale de su casa siempre a la misma hora, y llega al colegio justo cuando su hijo está saliendo.

    Cierto día, Pepito salió del colegio 1 hora y 10 minutos antes de lo normal, así que decidió caminar siguiendo la ruta que su mamá siempre usa. Andrea salió de su casa como siempre, solo que en esta ocasión encontró a Pepito en el camino, luego, lo llevó a casa el resto del trayecto. Tal como sucedieron las cosas, ambos llegaron a casa 30 minutos antes de lo normal. ¿Cuántos minutos caminó Pepito hasta que se encontró con su mamá?

    Nota: Hay que asumir que Andrea siempre conduce a la misma rapidez.