II CONCURSO DE MATEMÁTICA BINARIA 2012

Cuarto y Quinto de Secundaria

Primera Parte

De los problemas del 1 al 15 escoge una alternativa. Sólo una es la correcta.

1. David lleva ocho cursos en el colegio. En el primer bimestre el promedio de sus ocho notas fue 15. En el segundo bimestre, David consiguió subir 3 puntos en cada uno de los siguientes cursos: Matemática, Historia y Comunicación; y consiguió subir 1 punto en los otros cursos. ¿Cuál fue el promedio de David en el segundo bimestre?

   (A) 16.75 (B) 16.5 (C) 16.25 (D) 16.875 (E) 17

2. Se escriben en una lista todos los números cuyo producto de dígitos es igual a 24. La lista empieza con los números:

   $$38, 46, 64, 83, 138, \ldots$$

   Es claro que el número 2216 es parte de esa lista, ¿cuál es la diferencia del número que está inmediatamente después de 2216 en la lista, con el número que está inmediatamente antes?

   (A) 55 (B) 57 (C) 99 (D) 61 (E) 70

3. ¿Cuántos ángulos interiores obtusos, como mínimo, puede tener un pentágono convexo?

   Aclaración: Un pentágono convexo es aquel que tiene todos sus ángulos interiores menores que 180°.

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4. Un entero positivo es llamado *hostil* si se puede expresar como el producto de dos números primos diferentes. Por ejemplo, 26 es hostil porque $26 = 2 \times 13$; en cambio, 24 no es hostil. Determine cuántos enteros positivos n cumplen las siguientes tres propiedades a la vez:

   - $1 \leq n \leq 50$.
   - n es hostil.
   - $n + 1$ es hostil.

   (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 4

5. Determine el mayor número k que tiene la siguiente propiedad: El número 60 se puede expresar como el producto de k enteros positivos diferentes entre sí.

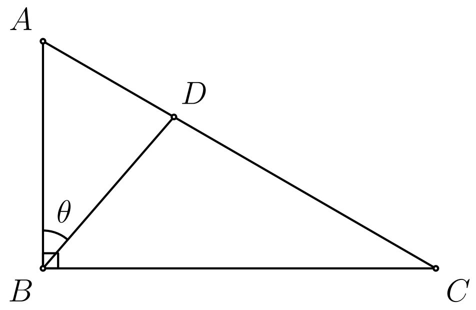
   (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

6. ¿A qué hora del día sábado se verifica que la fracción transcurrida de ese día es igual a la fracción transcurrida de la semana?

Aclaración: La semana comienza el día lunes.

(A) 8:00 am (B) 10:00 am (C) 12: 00 m (D) 4:00 pm (E) 8:00 pm

7. En la siguiente figura se muestra un triángulo rectángulo ABC, recto en B, con $AB = 3$. Si D es un punto de la hipotenusa tal que $AD = 2$ y $DC = 4$, calcula $\tan\theta$.



(A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. Hallar el rango de la función $g(x) = x^2 - 4x + 8$ si su dominio es $[1, 4]$.

(A) $[5, 7]$ (B) $[5, 8]$ (C) $[4, 8]$ (D) $[5, 9]$ (E) $[4, 9]$

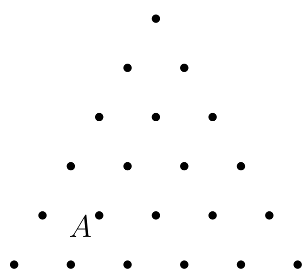
9. En un polígono de n lados se cumple que sus ángulos interiores forman una progresión aritmética de razón $5°$. Si el mayor ángulo de ese polígono es $160°$, calcula el valor de n.

(A) 11 (B) 10 (C) 7 (D) 8 (E) 9

10. Si $2^a = 3$ y $3^b = 4$, demuestre que el número $4^a + (5^a)^b$ es entero y dé como respuesta el producto de los dígitos de ese número.

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 18

11. En la siguiente figura se han marcado algunos vértices de una *red* de triángulos equiláteros de lado 1. Hay 21 puntos marcados en total. ¿Cuántos triángulos equiláteros tienen sus tres vértices en puntos marcados tales que uno de ellos es el punto A?



(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 8

12. Los buses de Lima a Trujillo salen cada dos horas, en los horarios:

$$01:00, \quad 03:00, \quad 05:00, \quad \ldots, \quad 23:00.$$

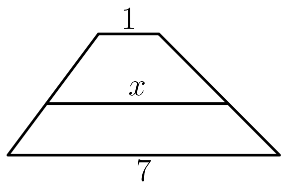
Los buses de Trujillo a Lima también salen cada dos horas, pero en los horarios:

$$00:00, \quad 02:00, \quad 04:00, \quad \ldots, \quad 22:00.$$

Se sabe que el viaje de Lima a Trujillo, o viceversa, dura 8 horas. Miguel salió de Lima con dirección a Trujillo, ¿con cuántos buses se cruzó en el camino?

(A) 9 (B) 7 (C) 10 (D) 8 (E) 11

13. En la figura se muestra un trapecio de bases 1 y 7 que ha sido dividido en dos cuadriláteros de igual área por medio del segmento de longitud x que es paralelo a las bases. Determine la longitud de x.



(A) $\frac{7}{2}$ (B) $\sqrt{7}$ (C) 4 (D) 5 (E) $\frac{11}{2}$

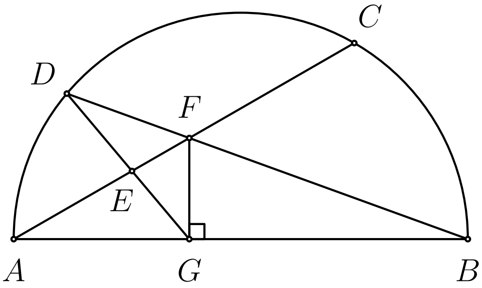
14. La ecuación cuadrática $x^2 + 7x - 6 = 0$ tiene raíces x_1 y x_2. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos

$$S_n = n(x_1^n + x_2^n).$$

Calcula el valor de $\dfrac{S_8}{S_6 - S_7}$.

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) N.A.

15. A continuación se muestra una semicircunferencia de diámetro AB, F es el punto de intersección de las cuerdas AC y BD. Además, FG es perpendicular a AB. Si $EF = 2$, $DF = 3$ y $FC = 6$, calcula la longitud de AB.



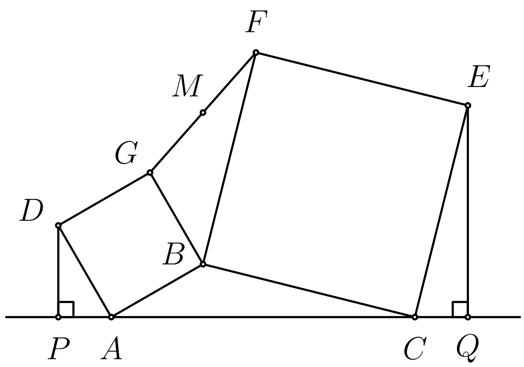
(A) 13 (B) $8\sqrt{3}$ (C) $6\sqrt{7}$ (D) $3\sqrt{19}$ (E) $\sqrt{183}$

Segunda Parte

Para cada una de las siguientes preguntas, escribe de forma nítida tu respuesta en el cuadro correspondiente.

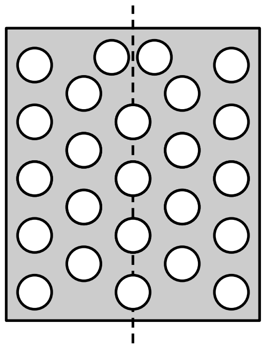
16. ¿Cuántos cuadrados perfectos son mayores que 10^6 y menores que 11^6 ?

17. Sea ABC un triángulo. Exteriormente al triángulo se construyen los cuadrados $ABGD$ y $BCEF$, y M es el punto medio de GF. Sean P y Q las proyecciones de D y E sobre la recta AC. Calcule la longitud del segmento PQ, si sabe que $AC = 6$ y el área del triángulo AMC es 15.



18. Kevin compró una caja de 24 chocolates, al abrirla se dio cuenta que los chocolates están ubicados simétricamente con respecto a la línea vertical central, tal como se muestra a la derecha.

    En los círculos blancos van los chocolates. ¿De cuántas formas puede Kevin comer 4 chocolates, tal que los 20 chocolates que queden tengan simetría respecto a la línea vertical central?



19. De lunes a viernes, Andrea recoge a su hijo Pepito del colegio y lo lleva en su auto a casa. Ella sale de su casa siempre a la misma hora, y llega al colegio justo cuando su hijo está saliendo.

    Cierto día, Pepito salió del colegio 1 hora y 10 minutos antes de lo normal, así que decidió caminar siguiendo la ruta que su mamá siempre usa. Andrea salió de su casa como siempre, solo que en esta ocasión encontró a Pepito en el camino, luego, lo llevó a casa el resto del trayecto. Tal como sucedieron las cosas, ambos llegaron a casa 30 minutos antes de lo normal. ¿Cuántos minutos caminó Pepito hasta que se encontró con su mamá?

    Nota: Hay que asumir que Andrea siempre conduce a la misma rapidez.

20. Definimos la función $f(n)$ en los enteros no negativos, de la siguiente forma: $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, y para $n > 2$, $f(n)$ es el menor entero positivo que no divide a n. Por ejemplo, $f(6) = 4$ y $f(11) = 2$.

    Para cada entero positivo n, sea $T(n) = f(f(f(n)))$. Calcule el valor de la siguiente suma:

$$T(1) + T(2) + T(3) + \cdots + T(2011) + T(2012).$$