III CONCURSO DE MATEMÁTICA BINARIA 2013

Cuarto y Quinto de Secundaria

Parte A

De los problemas del A1 al A15 escoge una alternativa. Solo una es la correcta.

A1 Nicolás, Abel, Jorge y Marcos se dedican a los negocios pero en rubros diferentes; sus rubros son: madera, camisas, computadoras y relojes, no necesariamente en ese orden, y sus edades son: 28, 32, 45 y 48 años, no necesariamente en ese orden. Se sabe que:

- Abel se dedica al rubro de las maderas.
- El mayor tiene un negocio de camisas.
- Jorge es mayor que Nicolás, pero es menor que Abel.

¿Cuál es la suma de las edades, en años, de Nicolás y Marcos?

(A) 73 (B) 80 (C) 77 (D) 76 (E) 60

A2 Escribimos los números

$$3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, \ldots$$

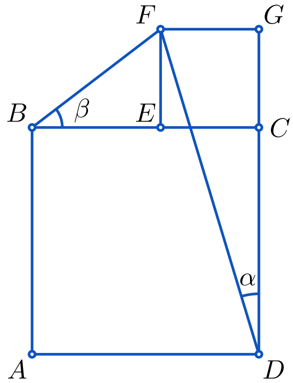
hasta que la suma de todos los números escritos sea igual a 2013, y a partir de ese momento ya no escribimos más números. ¿Cuántos números se han escrito en total?

(A) 1005 (B) 1006 (C) 1007 (D) 1008 (E) 1009

A3 Un conjunto consta de n elementos cuyo promedio (aritmético) es igual a n. Si a dicho conjunto se le añade el elemento 31, resulta un nuevo conjunto cuyo promedio es igual a $n+1$. Determina el valor de n.

(A) 28 (B) 29 (C) 15 (D) 30 (E) 16

A4 En la figura se muestra dos cuadrados $ABCD$ y $CEFG$. Si $\tan\alpha \cdot \tan\beta = \frac{1}{48}$, determine el valor de $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$.



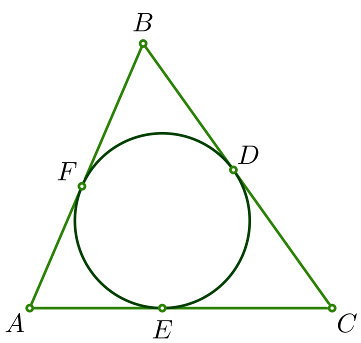
(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{4}{3}$

A5 Un hombre protestaba por su mala suerte. Había perdido su trabajo y sólo le quedaban unos soles en el bolsillo. El diablo se le acercó y le hizo una extraña proposición: «Yo puedo hacer que tu dinero se duplique cada vez que cruces el puente que atraviesa el río. La única condición es que yo te esperaré al otro lado y debes entregarme 24 soles.»

El trato parecía ventajoso, sin embargo, cuando cruzó el puente por tercera vez, al dar al diablo los 24 soles se quedó sin dinero: ¡Había sido engañado! ¿Cuántos soles tenía el hombre al inicio?

(A) 20 (B) 24 (C) 15 (D) 18 (E) 21

A6 En el triángulo ABC se ha inscrito una circunferencia, la cual es tangente a los lados del triángulo ABC en los puntos D, E, F. Uno de los ángulos del triángulo ABC es 56° y uno de los ángulos del triángulo DEF es 50°, determine la medida del menor ángulo del triángulo ABC.



(A) 56° (B) 50° (C) 32° (D) 40° (E) 44°

A7 El número 858585 se puede expresar como el producto de k números primos, donde cada uno de ellos es menor que 50. Halle el valor de k.

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

A8 Sean x, y, z, w, t números reales tales que:

$$|x-y| = 4$$
$$|y-z| = 5$$
$$|z-w| = 6$$
$$|w-t| = 7.$$

Determine el menor valor posible de $|x-t|$.

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

A9 ¿Cuántos divisores positivos del número $20^{13} \times 13$ son múltiplos de 4 pero no son múltiplos de 8?

(A) 52 (B) 28 (C) 26 (D) 13 (E) 32

A10 Si a, b, c, d son números enteros que satisfacen la siguiente igualdad

$$(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 + (d-4)^2 = 3,$$

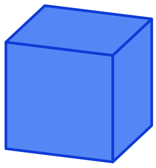
determine el mayor valor posible de $a + b + c + d$.

(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 11 (E) 13

A11 Un triángulo tiene una mediana de longitud 9 y otra mediana de longitud 12, ¿cuál es el mayor valor que puede tomar su área?

(A) 54 (B) 60 (C) 72 (D) 80 (E) 81

A12 En cada una de las caras de un cubo está escrito un número primo, de tal forma que los seis números primos son distintos y se cumple que al sumar los números de caras opuestas se obtiene siempre el mismo resultado. Si denotamos con M al mayor de estos seis números, ¿cuál es menor valor posible de M?



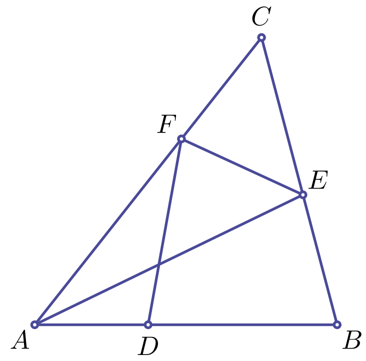
(A) 13 (B) 17 (C) 19 (D) 23 (E) 29

A13 Determine el valor de la siguiente expresión:

$$\tan 8^\circ \cdot \tan 68^\circ + \tan 68^\circ \cdot \tan 128^\circ + \tan 128^\circ \cdot \tan 8^\circ.$$

(A) $-\sqrt{3}$ (B) -3 (C) -1 (D) $-\tan 24^\circ$ (E) $\frac{1}{2}$

A14 El triángulo ABC tiene área 640, y en los lados AB, BC, CA se toman los puntos D, E, F, respectivamente. Si $AD = 12$, $DB = 20$ y el área del triángulo ABE es igual al área del cuadrilátero $DBEF$, determine el área del triángulo DBE.



(A) 300 (B) 360 (C) 240 (D) 250 (E) 280

A15 En una fiesta había varias cajas de chocolates puestas sobre la mesa. Al terminar la fiesta, los asistentes pudieron establecer las siguientes conclusiones:

- De cada caja de chocolates comieron exactamente seis personas.
- Cada persona escogió chocolates de exactamente dos cajas distintas.
- Por cada par de cajas hubo exactamente una persona que comió de ambas cajas.

¿Cuantas personas comieron chocolates?

(A) 7 (B) 12 C) 15 (D) 21 (E) 18

Parte B

De los problemas del B1 al B5 escribe de forma nítida tu respuesta en el cuadro correspondiente y marca los cuatro dígitos en la hoja de respuesta. Si tu respuesta es, por ejemplo, 102 tienes que marcar 0102 y si tu respuesta es 7 tienes que marcar 0007.

B1 Las longitudes de los lados de un triángulo *escaleno* son números enteros, y al multiplicar estas longitudes obtenemos un número par. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar el perímetro de dicho triángulo?

Aclaración: Un triángulo es escaleno si tiene sus tres lados de longitudes diferentes.

B2 Cada vértice de un polígono regular de 40 lados se pinta de rojo o azul, de tal forma que los extremos de cada lado del polígono tienen colores diferentes. ¿Cuántas diagonales de ese polígono tienen sus extremos de colores diferentes?

B3 Las longitudes de los lados de un pentágono convexo $ABCDE$ son 4, 5, 6, 7, 8, aunque no necesariamente en ese orden. Sean F, G, H, I los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DE, respectivamente. Sea X el punto medio de FH y Y el punto medio de GI. Se sabe que la longitud del segmento XY es un número entero. Halle la suma de todas las posibles longitudes del lado AE.

B4 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$f(13 - z) = f(13 + z),$$

para todo número real z.

Si la ecuación $f(x) = 7$ tiene exactamente 7 soluciones reales distintas: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$, determine el valor de

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7.$$

B5 Para cada entero positivo n sea $d(n)$ el exponente de 2 en la descomposición canónica de n. Por ejemplo, $d(5) = 0$, $d(8) = 3$ y $d(24) = 3$. Sea $A = 2013^{2016} - 1$ y $B = 2011^A - 1$. Calcule el valor de $d(A) + d(B)$.