VI CONCURSO DE MATEMÁTICA BINARIA 2018 - Segunda Etapa

Cuarto y Quinto de Secundaria

De los problemas del A1 al A10 escoge una alternativa. Solo una es la correcta.

A1 Los números 27, $\overline{a3}$, $\overline{5b}$, $\overline{cd}$ forman una progresión aritmética (en ese orden). Calcule el valor de $a+b+c+d$.

(A) 22 (B) 27 (C) 19 (D) 23 (E) 25

A2 Carlos le dice a Alfredo: "*Si me das S/ 4, tendríamos la misma cantidad de dinero, pero si yo te doy S/ 3, entonces tendrías el doble del dinero que me quedaría*". ¿Cuánto dinero tiene Carlos?

(A) S/ 18 (B) S/ 1 (C) S/ 14 (D) S/ 19 (E) S/ 17

A3 En un colegio los nombres de los profesores de matemática son: José, Luis, José, Karen, Pedro, Luis, Sandra y Ramiro. Si se escoge dos profesores al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tengan el mismo nombre?

(A) $\frac{1}{28}$ (B) $\frac{1}{21}$ (C) $\frac{1}{14}$ (D) $\frac{1}{32}$ (E) $\frac{1}{7}$

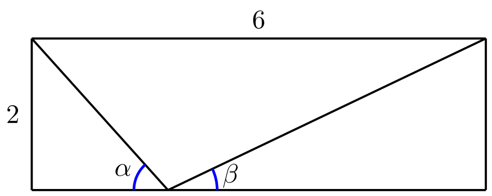
A4 Un niño cometió una travesura, pero no se sabe quién fue. Hay cuatro sospechosos: Carlos, Gabriel, Lucas y Omar. Al ser interrogados, cada uno declaró lo siguiente:

- Carlos: Gabriel es el culpable.
- Lucas: Yo no soy culpable.
- Gabriel: Omar es el culpable.
- Omar: Yo no soy culpable.

Se sabe que exactamente un niño dijo la verdad. ¿Quién es el (único) culpable?

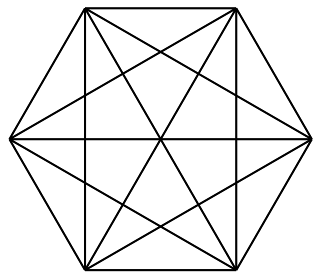
(A) Lucas (B) Omar (C) Gabriel
(D) Carlos (E) falta información

A5 En la figura se muestra un rectángulo de dimensiones 2 y 6. Calcule el valor de $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cdot\csc\alpha\cdot\csc\beta$.



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) 9

A6 En la siguiente figura, se han trazado todas las diagonales de un hexágono regular.



Determine cuántos triángulos rectángulos hay en esta figura.

(A) 24 (B) 48 (C) 60 (D) 72 (E) 84

A7 Considere la función $f(x)=x^2-3x+4$. Determine cuántas soluciones reales distintas tiene la ecuación:

$$f(f(f(f(f(x)))))=2.$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 8

A8 Sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito en una circunferencia tal que los triángulos ACE y BDF son triángulos equiláteros. Si $AB=10$, $DE=6$ y el área del hexágono $ABCDEF$ es igual a $n\sqrt{3}$, calcule el valor de n.

(A) 72 (B) 94 (C) 91 (D) 87 (E) 89

A9 Sobre la superficie de un cubo se marcaron N puntos rojos (cada punto rojo puede ser un vértice del cubo, estar incluido en una arista o estar en el interior de una cara). Se sabe que no hay dos caras del cubo que contienen el mismo número de puntos rojos. Determine el menor valor posible de N.

Aclaración: considere que una cara también contiene a todo su borde, es decir, contiene a sus vértices y sus aristas. Por ejemplo, si solo se marca un vértice de rojo (y ningún otro punto rojo más), hay tres caras que contienen 1 punto rojo y 3 caras que contienen 0 puntos rojos.

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

A10 Determine cuántos números enteros n, con $2\le n\le 2018$, cumplen que $n^6+n^4-n^2-1$ es múltiplo de 332.

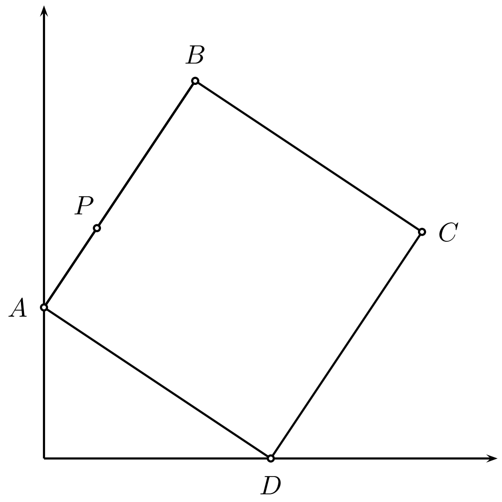
(A) 24 (B) 48 (C) 47 (D) 12 (E) 36

Parte B

De los problemas del B1 al B5 escribe de forma nítida tu respuesta en el cuadro correspondiente y marca los cuatro dígitos en la hoja de respuesta. Si tu respuesta es, por ejemplo, 102 tienes que marcar 0102 y si tu respuesta es 7 tienes que marcar 0007.

B1 Encuentre el menor entero positivo que es múltiplo de 14 y tiene exactamente 15 divisores positivos.

B2 En la figura se muestra un cuadrado $ABCD$ dibujado en el plano cartesiano, donde P es un punto del lado AB. Se sabe que las coordenadas de C y P son $(10, 6)$ y $(2, k)$, respectivamente. Calcule el valor de k.



B3 Sea α un ángulo tal que $\operatorname{sen}\alpha(1+\operatorname{sen}\alpha) = 1+\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$. Calcule el valor de $4\csc^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha + 1$.

B4 Determine el menor entero entero positivo n para el cual existen números reales x, y, z, w tales que

$$\begin{aligned}(x+y)(z+w) &= 8,\\ (x+z)(y+w) &= 12,\\ (x+w)(y+z) &= 16,\\ x^2+y^2+z^2+w^2 &\leq n.\end{aligned}$$

B5 Para cada conjunto $\mathcal{X}$ formado por enteros positivos, sea $|\mathcal{X}|$ la cantidad de elementos de $\mathcal{X}$ y sea $s(\mathcal{X})$ la suma de los elementos de $\mathcal{X}$. Determine para cuántos enteros positivos n, con $n \leq 30$, existen conjuntos no vacíos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, disjuntos dos a dos, tales que:

- $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{1, 2, \ldots, n\}$,
- $|\mathcal{A}| < |\mathcal{B}| < |\mathcal{C}|$,
- $s(\mathcal{A}) > s(\mathcal{B}) > s(\mathcal{C})$.