CANGURO MATEMÁTICO 2011
QUINTO DE SECUNDARIA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

INDICACIONES

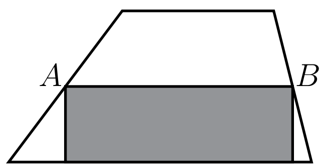
- Las marcas en la hoja de respuestas se deben realizar, únicamente, con LÁPIZ.
- Escriba su apellido paterno, apellido materno y nombres con letras de imprenta y todas MAYÚSCULAS y marque su CÓDIGO en los espacios destinados para este fin.
- Las marcas deben ser nítidas pintando el CÍRCULO completo (ver muestra en la hoja de respuestas).
- Marcar SOLAMENTE UNA de las opciones en cada problema.
- No debe hacer ninguna otra marca fuera de los espacios indicados (NO usar la hoja de respuestas para hacer cálculos en borrador).
- Duración: 1 hora y 30 minutos.
- La calificación se realizará de la siguiente manera:
  - Cada pregunta de la 1 a la 10 vale 3 puntos.
  - Cada pregunta de la 11 a la 20 vale 4 puntos.
  - Cada pregunta de la 21 a la 30 vale 5 puntos.

1. En un cruce peatonal se alternan franjas blancas y negras, cada una tiene 50 cm de ancho. Uno de estos cruces comienza y termina con una franja blanca, y tiene 8 franjas blancas en total. ¿Cuál es el ancho total del cruce?

   (A) 7 m (B) 7,5 m (C) 8 m (D) 8,5 m (E) 9 m

2. El rectángulo sombreado tiene un área de 13 cm^2. A y B son los puntos medios de los lados del trapecio. ¿Cuál es el área del trapecio?

   (A) 24 cm^2 (B) 25 cm^2 (C) 26 cm^2 (D) 27 cm^2 (E) 28 cm^2



3. Dadas las expresiones

$$S_1 = 2\times 3 + 3\times 4 + 4\times 5, \quad S_2 = 2^2 + 3^2 + 4^2, \quad S_3 = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4,$$

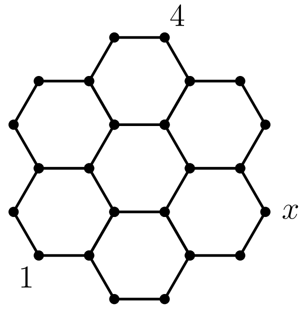
   ¿cuál de las siguientes relaciones son verdaderas?

   (A) $S_2 < S_1 < S_3$ (B) $S_3 < S_2 < S_1$ (C) $S_1 < S_2 < S_3$

   (D) $S_1 < S_2 = S_3$ (E) $S_1 = S_2 < S_3$

4. En la siguiente figura debe haber un número en cada vértice, de tal manera que la suma de los números en los extremos de cada segmento sea la misma. Dos de los números ya están allí. ¿Qué número debe ir en el punto x?

(A) 1 (B) 3 (C) 4
(D) 5 (E) la información no es suficiente



5. Cuando 2011 se dividió por un cierto número, el resto fue 1011. ¿Cuál de los números siguientes fue el divisor?

(A) 100 (B) 500 (C) 1000 (D) 2000 (E) no es posible obtener ese resto

6. Un mosaico rectangular con 360 cm^2 de área está hecho de baldosas cuadradas, todas del mismo tamaño. El mosaico tiene 24 cm de alto y 5 baldosas de ancho. ¿Cuál es el área de cada baldosa en cm^2?

(A) 1 (B) 4 (C) 9 (D) 16 (E) 25

7. Dado que $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$, ¿cuál es el valor de n?

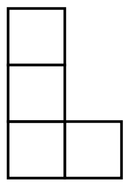
(A) 1005 (B) 1006 (C) 2010 (D) 2011 (E) ninguno de ellos

8. Todos los números de cuatro dígitos cuyos dígitos suman 4 se escriben en orden descendente. ¿En qué lugar de esta secuencia está ubicado el número 2011?

(A) 6° (B) 8° (C) 7° (D) 10° (E) 9°

9. El diagrama muestra cuatro cuadrados idénticos dispuestos en forma de L. Se desea agregar un quinto cuadrado de modo que se forme una figura con un eje de simetría. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

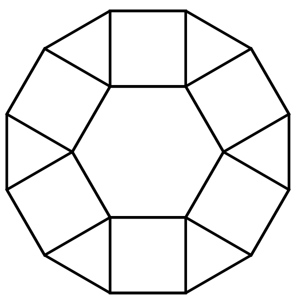
(A) 1 (B) 6 (C) 2 (D) 5 (E) 3



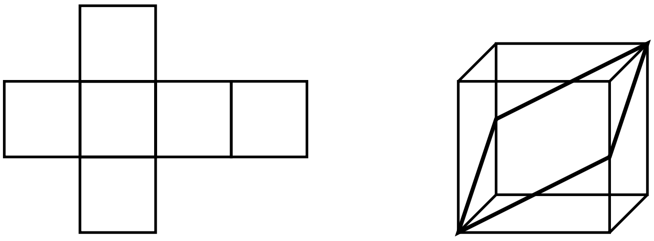
10. El diagrama muestra una figura compuesta por un hexágono regular de lado 1, seis triángulos y seis cuadrados. ¿Cuál es el perímetro de la figura?

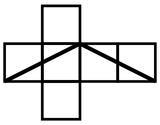
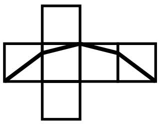
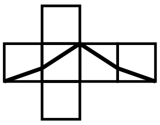
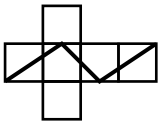
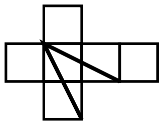
(A) $6\left(1+\sqrt{2}\right)$ (B) $6\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (C) 12

(D) $6+3\sqrt{3}$ (E) 9



11. Un cubo se construye con papel plegado como muestra la figura. Por la superficie del cubo se traza una línea oscura que divide a la superficie del cubo en dos partes idénticas. ¿Cómo queda el papel después de que el cubo se desdobla?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

12. Se tienen dos cubos con lados de longitudes x cm y $(x + 10)$ cm. El cubo grande está lleno de agua y el pequeño está vacío. Se vierte agua del cubo grande en el cubo pequeño hasta llenarlo, y quedan 217 litros en el cubo grande. ¿Cuántos litros de agua se vertió en el cubo pequeño?

(A) 243 (B) 512 (C) 125 (D) 1331 (E) 729

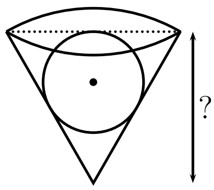
13. En un determinado mes se produjeron 5 lunes, 5 martes y 5 miércoles. En el mes anterior hubo sólo cuatro domingos. Entonces el próximo mes incluirá necesariamente:

(A) 5 domingos (B) 5 miércoles (C) exactamente 4 viernes

(D) exactamente 4 sábados (E) la situación es imposible

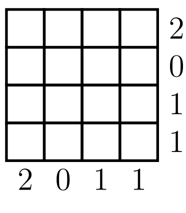
14. Una esfera con radio 15 rueda dentro de un agujero cónico y encaja exactamente. La vista lateral del agujero cónico es un triángulo equilátero. ¿Qué tan profundo es el hoyo?

(A) 45 (B) $25\sqrt{2}$ (C) 60 (D) $30\sqrt{2}$ (E) $60(\sqrt{3} - 1)$



15. Algunos cuadraditos de un tablero blanco de 4×4 deben pintarse de negro. En la figura se indica, al lado de cada fila o columna, el número de cuadraditos en esa fila o columna que deben pintarse de negro. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) 9



16. ¿Cuál es la mayor cantidad de números enteros consecutivos de 3 dígitos que podemos escribir, con la condición de que todos tengan por lo menos un dígito impar?

(A) 221 (B) 111 (C) 110 (D) 10 (E) 1

17. Los números reales a y b son ambos mayores que 1. ¿Cuál de las siguientes fracciones tiene el mayor valor?

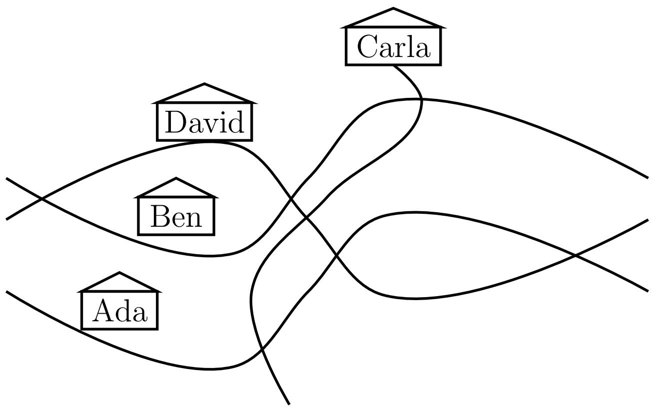
(A) $\dfrac{a}{b+1}$ (B) $\dfrac{a}{b-1}$ (C) $\dfrac{2a}{2b+1}$ (D) $\dfrac{2a}{2b-1}$ (E) $\dfrac{3a}{3b+1}$

18. Nicolás quiere escribir números enteros en los cuadraditos de un tablero de 3×3 de manera que la suma de los números en cada cuadrado de 2×2 sea igual a 10. Ya ha escrito cinco números, como se muestra en la figura. Encuentra la suma de los cuatro números restantes.

1		0
	2	
4		3

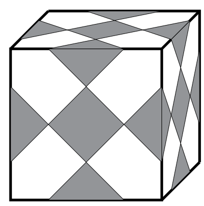
(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) 11

19. Durante un viaje muy movido, Juana trató de esbozar un mapa de su aldea natal. Se las arregló para dibujar las cuatro calles, sus siete cruces y las casas de sus amigos, pero en realidad tres de las calles son rectas y sólo una es curva. ¿Quién vive en la calle curva?



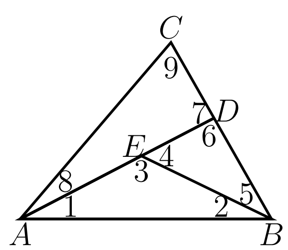
(A) Ada (B) Ben (C) Carla (D) David (E) La información es insuficiente

20. Simón tiene un cubo de vidrio de 10 cm de lado, en cuyas caras pegó varios cuadrados idénticos de papel oscuro, de modo que el cubo se ve igual desde todos los lados (ver figura). ¿Cuántos cm^2 son de papel oscuro?



(A) 37,5 (B) 150 (C) 225 (D) 300 (E) 375

21. En el triángulo ABC, se elige un punto D en el segmento BC, y luego se elige el punto E en el segmento AD. Se obtienen así 9 ángulos denotados en la figura por los números $1, 2, \ldots, 9$. Encuentre el mínimo número posible de valores diferentes que los ángulos $1, 2, \ldots, 9$ podrían tomar.



(A) 3 (B) 5 (C) 2 (D) 6 (E) 4

22. Para un entero $n \geq 2$ denotemos por $\langle n \rangle$ al mayor número primo que no exceda a n, por ejemplo $\langle 13 \rangle = 13$ y $\langle 27 \rangle = 23$. ¿Cuántos enteros positivos k satisfacen la ecuación $\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 2k+3 \rangle$?

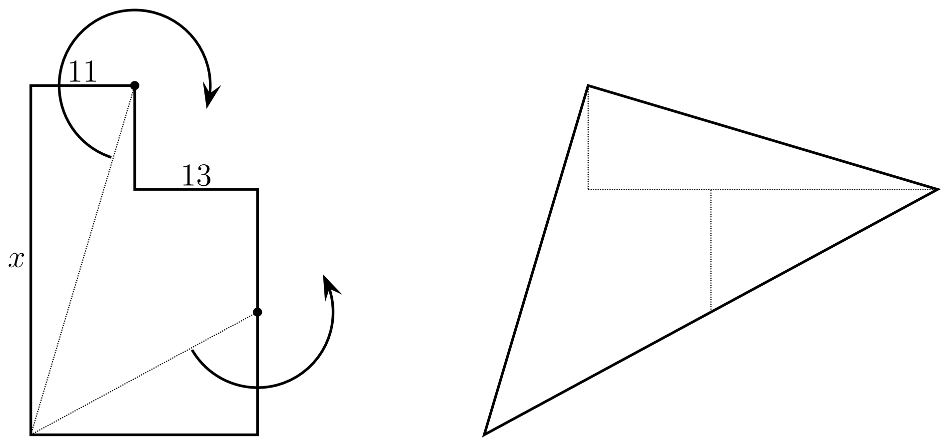
(A) 0 (B) más de 3 (C) 2 (D) 3 (E) 1

23. ¿Cuántos pares ordenados de números naturales (x, y) satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}?$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

24. La siguiente figura se compone de dos rectángulos. Las longitudes de dos lados están marcadas: 11 y 13. La figura se corta en tres partes y las partes se reorganizan en un triángulo. ¿Cuál es la longitud del lado x?



(A) 40 (B) 39 (C) 38 (D) 37 (E) 36

25. Un dado es *normal* si los puntos en cada par de caras opuestas suman 7. Tres dados normales son apilados uno encima del otro de modo que la suma de puntos en cualquier par de caras en contacto es 5. Una de las caras visibles del dado inferior muestra un punto. ¿Cuántos puntos tiene la cara superior del dado superior?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

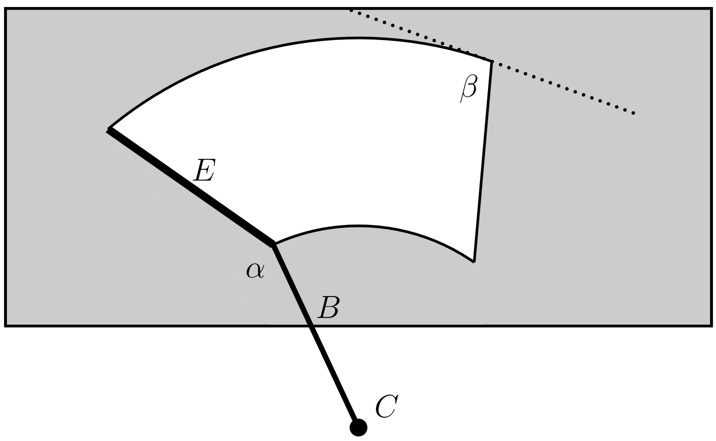
26. Llamemos a un número de cinco dígitos $\overline{abcde}$ *interesante* si sus dígitos son todos diferentes y $a = b + c + d + e$. ¿Cuántos números interesantes hay?

(A) 72 (B) 144 (C) 168 (D) 216 (E) 288

27. Tres deportistas participaron en una carrera: Miguel, Fernando y Sebastián. Inmediatamente después del comienzo, Miguel iba primero, Fernando segundo y Sebastián tercero. Durante la carrera, Miguel y Fernando se pasaron uno al otro 9 veces, Fernando y Sebastián lo hicieron 10 veces, y Miguel y Sebastián 11. ¿En qué orden finalizaron la carrera?

(A) Miguel, Fernando, Sebastián (B) Fernando, Miguel, Sebastián (C) Sebastián, Miguel, Fernando (D) Sebastián, Fernando, Miguel (E) Fernando, Sebastián, Miguel

28. El limpiavidrios trasero de un carro está construido de tal manera que la escobilla E y el brazo B tienen igual longitud y en el punto de unión forman un ángulo fijo α. El limpiavidrios gira alrededor de C, que se mantiene fijo, y limpia el área que se ve en la figura.



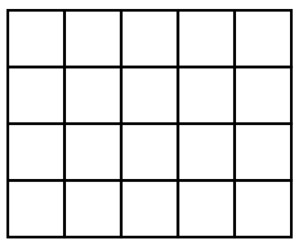
Determine el ángulo β (en radianes) formado por el lado recto derecho del área limpiada con la tangente.

(A) $\dfrac{3\pi - \alpha}{2}$ (B) $\pi - \dfrac{\alpha}{2}$ (C) $\dfrac{3\pi}{2} - \alpha$ (D) $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$ (E) $\pi + \dfrac{\alpha}{2}$

29. Sean a, b y c enteros positivos tales que $a^2 = 2b^3 = 3c^5$. ¿Cuál es la menor cantidad de divisores que puede tener abc (incluyendo a 1 y abc)?

(A) 30 (B) 49 (C) 60 (D) 77 (E) 1596

30. Se han escrito veinte enteros positivos diferentes en un tablero de 4×5, de modo que dos números vecinos cualesquiera tienen un divisor común mayor que 1. Si n es el mayor número en el tablero, encontrar el menor valor posible de n.



Aclaración: dos números son vecinos si están escritos en cuadraditos que tienen un lado en común.

(A) 21 (B) 24 (C) 26 (D) 27 (E) 40