

CANGURO MATEMÁTICO 2016

QUINTO DE SECUNDARIA



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

INDICACIONES

- Las marcas en la hoja de respuestas se deben realizar, únicamente, con LÁPIZ.
- Escriba su apellido paterno, apellido materno y nombres con letras de imprenta y todas MAYÚSCULAS.
- Las marcas deben ser nítidas pintando el CÍRCULO completo (ver muestra en la hoja de respuestas).
- Marcar SOLAMENTE UNA de las opciones en cada problema.
- No debe hacer ninguna otra marca fuera de los espacios indicados (NO usar la hoja de respuestas para hacer cálculos en borrador).
- **Duración: 1 hora y 30 minutos.**
- La calificación se realizará de la siguiente manera:

Pregunta	Correcta	Incorrecta	En blanco
De la 1 a la 10	+ 3 puntos	-3/4 puntos	0 puntos
De la 11 a la 20	+ 4 puntos	-1 puntos	0 puntos
De la 21 a la 30	+ 5 puntos	-5/4 puntos	0 puntos

Para evitar calificaciones negativas, la puntuación comienza con 30 puntos.

1 Simplifique la suma $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$.

(A) $\frac{3}{111}$

(B) $\frac{111}{1110}$

(C) $\frac{111}{1000}$

(D) $\frac{3}{1000}$

(E) $\frac{3}{1110}$

2 La suma de las edades de Tom y John es 23, la suma de las edades de John y Alex es 24 y la suma de las edades de Tom y Alex es 25. ¿Cuál es la edad del mayor?

(A) 10

(B) 11

(C) 12

(D) 13

(E) 14

3 ¿Cuántos números enteros son mayores que 2015×2017 pero menores que 2016×2016 ?

(A) Ninguno

(B) 1

(C) 2015

(D) 2016

(E) 2017

4 Dos piezas de soga miden 1 m y 2 m. Alex corta las piezas en varias partes, de tal manera que todas las partes tienen igual longitud. ¿Cuál de los siguientes números no puede ser la cantidad total de partes obtenidas?

- (A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 15

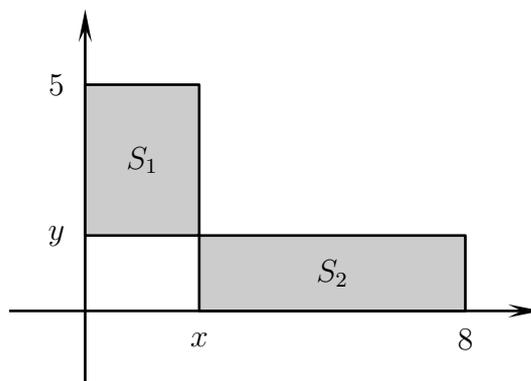
5 Si $x^2 - 4x + 2 = 0$, entonces $x + \frac{2}{x}$ es igual a

- (A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 4

6 El pequeño Lucas inventó su propia forma para representar a los números negativos, antes de que aprendiera la forma usual con el signo (-) en frente. Contando hacia atrás, él ha escrito: ... 3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000, ... ¿Cuál es el resultado de $000 + 0000$, según la notación de Lucas?

- (A) 1 (B) 00000 (C) 000000 (D) 0000000 (E) 00000000

7 Los rectángulos S_1 y S_2 de la figura tienen igual área. Determine la razón $\frac{x}{y}$.



- (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{7}{4}$ (E) $\frac{8}{5}$

8 La sucesión x_1, x_2, x_3, \dots se define de la siguiente forma: $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = x_n^{x_n}$, para $n \geq 1$. ¿Cuál de las siguientes alternativas es igual a x_4 ?

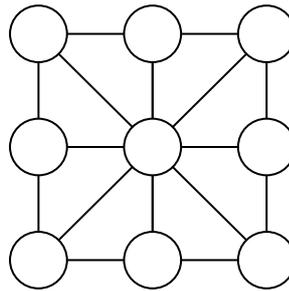
- (A) 2^{2^3} (B) 2^{2^4} (C) $2^{2^{11}}$ (D) $2^{2^{16}}$ (E) $2^{2^{768}}$

9 En un rectángulo $ABCD$ la longitud del lado BC es la mitad de la longitud de la diagonal AC . Sea M un punto en el lado CD tal que $AM = MC$. ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle CAM$?

- (A) $12,5^\circ$ (B) 15° (C) $27,5^\circ$ (D) $42,5^\circ$ (E) algún otro ángulo

- 10** Tengo un dado extraño: Las caras muestran los números del 1 al 6 de la forma usual, excepto que los números impares son negativos (-1 , -3 , -5 en lugar de 1, 3, 5). Si lanzo 2 dados de este tipo, ¿cuál de estos números no puede ser la suma de los dos números obtenidos?
- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 8

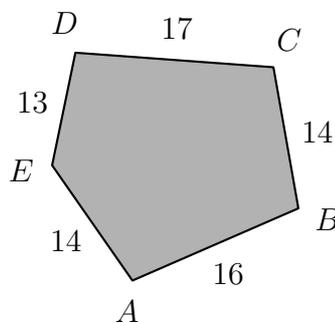
- 11** Diana quiere escribir nueve enteros en los círculos del diagrama mostrado, de tal manera que los ocho triángulos pequeños, cuyos vértices están unidos por segmentos, tengan igual suma de los números en los vértices. ¿Cuál es la mayor cantidad de enteros distintos que puede usar?



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 8

- 12** Sebastián escribió en una pizarra cinco números enteros positivos de un dígito. Él descubrió que la suma de dos números cualquiera no es igual a 10. ¿Cuál de los siguientes números definitivamente escribió en la pizarra?
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

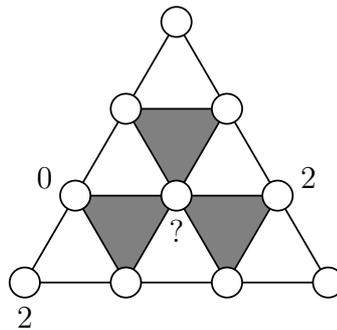
- 13** El diagrama muestra un pentágono. Miguel dibuja cinco circunferencias con centros A , B , C , D , E de tal modo que las circunferencias que pasan por un mismo lado del pentágono son tangentes. Las longitudes de los lados del pentágono están dadas en la figura. ¿Cuál de los puntos es el centro de la circunferencia más grande?



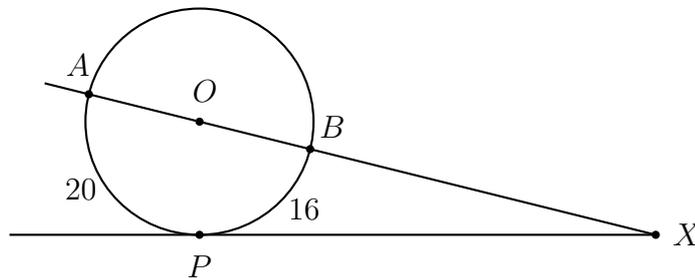
- (A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

- 14** En un triángulo rectángulo ABC , recto en A , las bisectrices de los ángulos agudos se intersectan en P . Si la distancia desde P a la hipotenusa es $\sqrt{8}$, ¿cuál es la distancia de P a A ?
- (A) 8 (B) 3 (C) $\sqrt{10}$ (D) $\sqrt{12}$ (E) 4

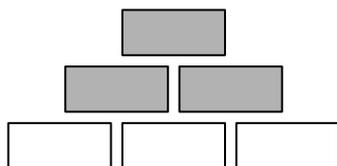
- 15** Cada uno de los 10 puntos en la figura es marcado con 0, 1 ó 2. Sabemos que la suma de los números en los vértices de cualquier triángulo blanco es divisible por 3, mientras que la suma de los números en los vértices de cualquier triángulo negro no es divisible por 3. Tres de los puntos ya están marcados como se muestra en la figura. ¿Qué números pueden ser usados para marcar el punto central?



- (A) Solo 0 (B) Solo 1 (C) Solo 2 (D) Solo 0 y 1 (E) 0, 1 ó 2
- 16** Las longitudes de los arcos AP y BP son 20 y 16, respectivamente. Luego, la medida del ángulo $\angle AXP$ es igual a

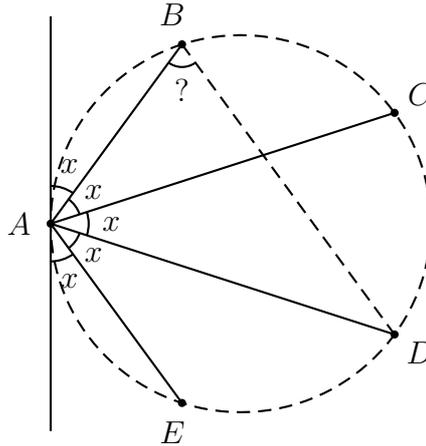


- (A) 30° (B) 24° (C) 18° (D) 15° (E) 10°
- 17** En las seis casillas mostradas se van a ubicar números, de tal forma que el número de cualquier casilla sombreada sea igual al producto de los dos números que están debajo de él.



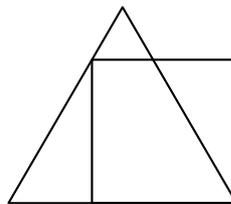
- ¿Cuál de los siguientes números no puede aparecer en la casilla superior, si los tres números que se encuentran en las casillas blancas son números naturales mayores que 1?
- (A) 56 (B) 84 (C) 90 (D) 105 (E) 220

- 18** Betina ubica cinco puntos A, B, C, D y E en una circunferencia y además dibuja la recta tangente en A a dicha circunferencia. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle ABD$?



- (A) 66° (B) $70,5^\circ$ (C) 72° (D) 75° (E) $77,5^\circ$

- 19** Si el perímetro del cuadrado de la figura es igual a 4, entonces el perímetro del triángulo equilátero es igual a



- (A) 4 (B) $3 + \sqrt{3}$ (C) 3 (D) $3 + \sqrt{2}$ (E) $4 + \sqrt{3}$

- 20** Un cuadrilátero tiene una circunferencia inscrita (es decir, la circunferencia es tangente a los cuatro lados del cuadrilátero). La razón entre los perímetros del cuadrilátero y de la circunferencia es $4 : 3$. Por lo tanto, la razón entre las áreas del cuadrilátero y de la circunferencia es

- (A) $4 : \pi$ (B) $3\sqrt{2} : \pi$ (C) $16 : 9$ (D) $\pi : 3$ (E) $4 : 3$

- 21** Las ecuaciones $x^2 + ax + b = 0$ y $x^2 + bx + a = 0$ tienen raíces reales. Sabemos que la suma de los cuadrados de las raíces de la primera ecuación es igual a la suma de los cuadrados de las raíces de la segunda ecuación, y además, $a \neq b$. Luego, $a + b$ es igual a

- (A) 0 (B) -2 (C) 4 (D) -4 (E) Es imposible

22 Un cubo es dividido en 6 pirámides, por la unión de un punto dado en el interior del cubo con cada vértice. Los volúmenes de cinco de estas pirámides son 2, 5, 10, 11 y 14. ¿Cuál es el volumen de la sexta pirámide?

- (A) 1 (B) 4 (C) 6 (D) 9 (E) 12

23 Ocho sobres sin etiquetar contienen los números: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Eva elige unos cuantos sobres al azar. Alejandra toma el resto. Ambas suman sus números. La suma de Eva es 31 más que la de Alejandra. ¿Cuántos sobres tomó Eva?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

24 Tres números de 3 dígitos están formados por los dígitos desde el 1 hasta el 9 (cada dígito es usado exactamente una vez). ¿Cuál de los siguientes números no puede ser igual a la suma de estos tres números?

- (A) 1500 (B) 1503 (C) 1512 (D) 1521 (E) 1575

25 Jill está haciendo un cuadrado mágico multiplicativo usando los números 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100. El producto de los números en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales debe ser el mismo. En la figura, se puede ver cómo ha empezado. ¿Qué número debe poner Jill en la casilla marcada con un asterisco?

20	1	
		*

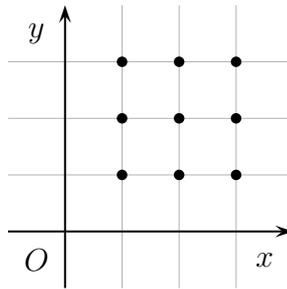
- (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 10 (E) 25

- 26** En la *Isla de los Caballeros y Bribones* cada habitante es o un caballero, que siempre dice la verdad, o un bribón, que siempre miente. Durante un viaje a la isla, Robinson encontró a 7 habitantes sentados alrededor de una fogata. Cada uno de ellos le dijo: «¡Estoy sentado entre dos bribones!» ¿Cuántos bribones hay alrededor de la fogata?
- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) Se necesita más información.

- 27** Ana elige un entero positivo n y escribe la suma de todos los enteros positivos desde 1 hasta n . Un número primo p divide a dicha suma, pero no divide a ningún sumando. ¿Cuál de los siguientes números puede ser $n + p$?
- (A) 269 (B) 221 (C) 229 (D) 245 (E) 217

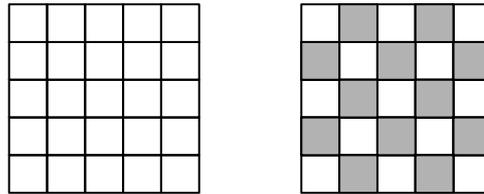
- 28** El entero positivo N tiene exactamente 6 divisores positivos distintos, incluyendo 1 y N . El producto de cinco de ellos es 648. ¿Cuál de los siguientes números es el divisor que falta?
- (A) 4 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 24

- 29** ¿Cuántas funciones cuadráticas en x tienen un gráfico que pasa por al menos 3 de los puntos marcados?



- (A) 6 (B) 15 (C) 19 (D) 22 (E) 27

- 30** Considere un cuadrado de 5×5 dividido en 25 casillas. Inicialmente todas las casillas son blancas. En cada *movimiento* está permitido cambiar el color de cualesquiera tres casillas consecutivas de una fila o columna al color opuesto (una casilla blanca se vuelve negra y una casilla negra se vuelve blanca). ¿Cuál es el menor número posible de movimientos que se necesita para obtener la coloración ajedrez mostrada en la figura?



- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) más de 9

Perú, 15 de abril de 2016.

¡MUCHAS GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN!