

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración de **3 horas**.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los **enunciados** de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- Cada problema tiene un puntaje máximo de **20 puntos**.
- Resuelve los problemas propuestos justificando adecuadamente cada paso.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.

1 ¿Existe un entero positivo de dos dígitos tal que al ser elevado al cubo se obtenga un número cuyos dos últimos dígitos sean iguales a 7 ?

2 En cada casilla de un tablero de 4×4 se coloca una o más monedas de oro o se coloca una o más monedas de plata (no está permitido que en una casilla haya monedas de distinto tipo). Demuestre, mediante un ejemplo, que es posible conseguir que en cada subtablero de 3×3 haya más monedas de oro que de plata y, además, que en todo el tablero haya más monedas de plata que de oro.

3 Un alumno escribió cuatro números naturales. Para cualesquiera dos de esos números calculó su diferencia (restando el mayor menos el menor). De esta forma obtuvo 6 diferencias.

a) ¿Es posible que las diferencias sean 1, 2, 3, 3, 4 y 6 ?

b) ¿Es posible que las diferencias sean 2, 2, 3, 4, 5 y 6 ?

4 Un número de seis dígitos, que es múltiplo de 9, es multiplicado por 111111. Demuestre que al menos un dígito del resultado es igual a 9.

5 Se tiene tres triángulos de papel congruentes. Demuestre que es posible dividir cada triángulo en dos partes de tal forma que con las seis partes obtenidas se pueda armar un solo triángulo (sin huecos ni superposiciones).

Aclaración: No se puede asumir que los triángulos iniciales son isósceles, equiláteros o de algún tipo especial. Solamente se sabe que son congruentes.