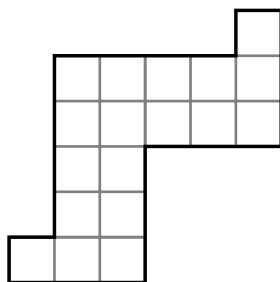


Indicaciones:

- La prueba tiene una duración de **2 horas y media**.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengan alguna duda acerca de los **enunciados** de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- Cada problema tiene un puntaje máximo de **10 puntos**.
- Resuelve los problemas propuestos justificando adecuadamente las soluciones.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.

1 Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. En el lado AD se ubica un punto P tal que $AP = BP = AB = PC = PD$. Demuestre que $\angle BCD = 120^\circ$.

2 Demuestre que la siguiente figura, que está formada por cuadraditos, puede ser dividida en tres figuras congruentes:

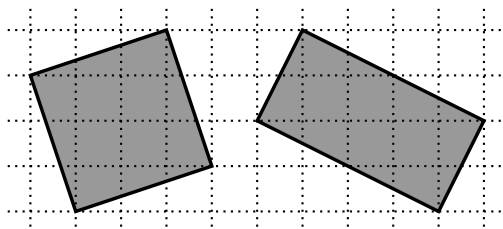


3 Sean T, J, M y P cuatro dígitos distintos tales que

$$\overline{TTTT} + \overline{JJJ} - \overline{MM} = \overline{P0PP},$$

donde el dígito de las centenas del resultado es cero. Determine todos los posibles valores de $T + J + M + P$.

4 En la siguiente figura se muestra un cuadrado y un rectángulo que han sido dibujados sobre un papel cuadriculado. Demuestre que haciendo algunos cortes al cuadrado es posible dividirlo en algunas partes y con todas esas partes armar el rectángulo.



- 5** En el calendario del planeta Binaria todos los meses tienen la misma cantidad de días. Después de 100 días del día 20 de cierto mes será el día 15 de otro mes; y después de 75 días del penúltimo día de cierto mes será el día 4 de otro mes. ¿Cuántos días tienen los meses en el planeta Binaria?
- 6** Al sumar los números de cuatro dígitos \overline{abbb} y \overline{bbba} se obtiene como resultado un número cuya suma de dígitos es 16. Halle todos los posibles valores de a y b , si se sabe que a es impar.
- 7** Muestre que es posible ubicar en el plano 8 puntos y trazar algunos segmentos cuyos extremos sean esos puntos de tal forma que dos segmentos cualesquiera no se corten interiormente y, además, cada punto sea extremo de exactamente cuatro segmentos.
- 8** Determine el menor entero positivo que es múltiplo de 12 tal que el producto de sus dígitos es 12600.
- 9** Encuentre un número de tres dígitos que sea igual a la suma de los cubos de sus dígitos.
- 10** Determine el menor entero positivo que es capicúa y cumple que al sumarlo con 4060 el resultado también es capicúa.
Aclaración: Un número es capicúa si lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo, 1, 22, 303 y 2002 son capicúas.
- 11** Un número entero positivo (expresado en el sistema decimal) es multiplicado por la suma de sus dígitos.
 a) ¿Es posible que el resultado sea igual a $2 \underbrace{00 \cdots 00}_{20 \text{ ceros}} 20$?
 b) ¿Es posible que el resultado sea igual a $3 \underbrace{00 \cdots 00}_{20 \text{ ceros}} 20$?
- 12** Determine si es posible ubicar en el plano 7 puntos distintos tales que, entre todos los triángulos que tienen sus vértices en esos puntos, más de 20 sean triángulos rectángulos.
- 13** En un tablero de 300×300 se pintaron de negro algunas casillas, de tal forma que no hay dos casillas negras que compartan un lado o que compartan un vértice. Ana quiere recortar un L -trominó formado por tres casillas blancas del tablero. Luego, ella contó todas las formas en que puede recortar el L -trominó y dijo que se puede hacer exactamente de 102000 formas. Demuestre que Ana hizo el conteo de forma incorrecta.
Aclaración: Un L -trominó es una figura formada por 3 casillas que se obtiene al eliminar una casilla de un tablero de 2×2 .
- 14** Sea \mathcal{A} el conjunto de los números enteros positivos de 7 dígitos cuyo producto de dígitos es mayor que cero y la suma de sus dígitos es 15. Sea \mathcal{B} el conjunto de los números enteros positivos de 7 dígitos cuyo producto de dígitos es mayor que cero y la suma de sus dígitos es 48. Determine cuál de los dos conjuntos tiene más elementos.