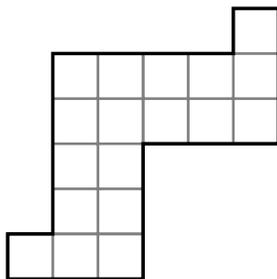


Indicaciones:

- La prueba tiene una duración de **2 horas y media**.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengan alguna duda acerca de los **enunciados** de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- Cada problema tiene un puntaje máximo de **10 puntos**.
- Resuelve los problemas propuestos justificando adecuadamente las soluciones.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.

- 1 Demuestre que la siguiente figura, que está formada por cuadraditos, puede ser dividida en tres figuras congruentes:

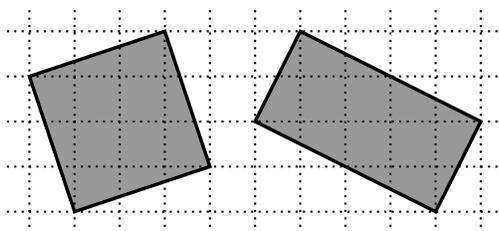


- 2 Sean  $T$ ,  $J$ ,  $M$  y  $P$  cuatro dígitos distintos tales que

$$\overline{TTTT} + \overline{JJJ} - \overline{MM} = \overline{P0PP},$$

donde el dígito de las centenas del resultado es cero. Determine todos los posibles valores de  $T + J + M + P$ .

- 3 En la siguiente figura se muestra un cuadrado y un rectángulo que han sido dibujados sobre un papel cuadriculado. Demuestre que haciendo algunos cortes al cuadrado es posible dividirlo en algunas partes y con todas esas partes armar el rectángulo.



- 4 En el calendario del planeta Binaria todos los meses tienen la misma cantidad de días. Después de 100 días del día 20 de cierto mes será el día 15 de otro mes; y después de 75 días del penúltimo día de cierto mes será el día 4 de otro mes. ¿Cuántos días tienen los meses en el planeta Binaria?
- 5 Al sumar los números de cuatro dígitos  $\overline{abbb}$  y  $\overline{bbba}$  se obtiene como resultado un número cuya suma de dígitos es 16. Halle todos los posibles valores de  $a$  y  $b$ , si se sabe que  $a$  es impar.
- 6 Muestre que es posible ubicar en el plano 8 puntos y trazar algunos segmentos cuyos extremos sean esos puntos de tal forma que dos segmentos cualesquiera no se corten interiormente y, además, cada punto sea extremo de exactamente cuatro segmentos.
- 7 Determine el menor entero positivo que es múltiplo de 12 tal que el producto de sus dígitos es 12600.
- 8 Encuentre un número de tres dígitos que sea igual a la suma de los cubos de sus dígitos.
- 9 Un número entero positivo (expresado en el sistema decimal) es multiplicado por la suma de sus dígitos.
- a) ¿Es posible que el resultado sea igual a  $2\underbrace{00 \cdots 00}_{20 \text{ ceros}}20$ ?
- b) ¿Es posible que el resultado sea igual a  $3\underbrace{00 \cdots 00}_{20 \text{ ceros}}20$ ?
- 10 Determine si es posible ubicar en el plano 7 puntos distintos tales que, entre todos los triángulos que tienen sus vértices en esos puntos, más de 20 sean triángulos rectángulos.
- 11 Sea  $ABCD$  un cuadrilátero convexo tal que  $\angle BCD = \angle ADC \geq 90^\circ$ . Las bisectrices de los ángulos  $\angle BAD$  y  $\angle ABC$  se intersectan en  $M$ , que es un punto que pertenece al lado  $CD$ . Pruebe que  $M$  es punto medio de  $CD$ .
- 12 En un tablero de  $300 \times 300$  se pintaron de negro algunas casillas, de tal forma que no hay dos casillas negras que compartan un lado o que compartan un vértice. Ana quiere recortar un  $L$ -trominó formado por tres casillas blancas del tablero. Luego, ella contó todas las formas en que puede recortar el  $L$ -trominó y dijo que se puede hacer exactamente de 102000 formas. Demuestre que Ana hizo el conteo de forma incorrecta.
- Aclaración:* Un  $L$ -trominó es una figura formada por 3 casillas que se obtiene al eliminar una casilla de un tablero de  $2 \times 2$ .

**13** Determine todas las ternas  $(x, y, z)$  de enteros positivos tales que  $xyz = 170170$  y

$$x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2.$$

**14** Sea  $\mathcal{A}$  el conjunto de los números enteros positivos de 7 dígitos cuyo producto de dígitos es mayor que cero y la suma de sus dígitos es 15. Sea  $\mathcal{B}$  el conjunto de los números enteros positivos de 7 dígitos cuyo producto de dígitos es mayor que cero y la suma de sus dígitos es 48. Determine cuál de los dos conjuntos tiene más elementos.