I Torneo de Jóvenes Matemáticos

Prueba por equipos - Ronda Internacional

Nivel 4

Indicaciones:

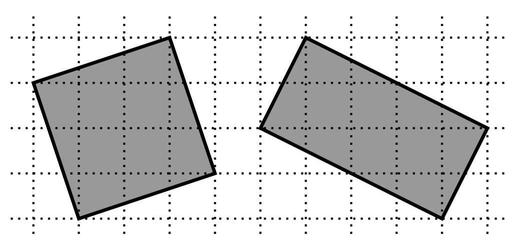
- La prueba tiene una duración de **2 horas y media**.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengan alguna duda acerca de los **enunciados** de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- Cada problema tiene un puntaje máximo de **10 puntos**.
- Resuelve los problemas propuestos justificando adecuadamente las soluciones.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.

1 Sean T, J, M y P cuatro dígitos distintos tales que

$$\overline{TTTT} + \overline{JJJ} - \overline{MM} = \overline{P0PP},$$

donde el dígito de las centenas del resultado es cero. Determine todos los posibles valores de $T + J + M + P$.

2 En la siguiente figura se muestra un cuadrado y un rectángulo que han sido dibujados sobre un papel cuadriculado. Demuestre que haciendo algunos cortes al cuadrado es posible dividirlo en algunas partes y con todas esas partes armar el rectángulo.



3 En el calendario del planeta Binaria todos los meses tienen la misma cantidad de días. Después de 100 días del día 20 de cierto mes será el día 15 de otro mes; y después de 75 días del penúltimo día de cierto mes será el día 4 de otro mes. ¿Cuántos días tienen los meses en el planeta Binaria?

4 Al sumar los números de cuatro dígitos $\overline{abbb}$ y $\overline{bbba}$ se obtiene como resultado un número cuya suma de dígitos es 16. Halle todos los posibles valores de a y b, si se sabe que a es impar.

$\boxed{\textbf{5}}$ Muestre que es posible ubicar en el plano 8 puntos y trazar algunos segmentos cuyos extremos sean esos puntos de tal forma que dos segmentos cualesquiera no se corten interiormente y, además, cada punto sea extremo de exactamente cuatro segmentos.

$\boxed{\textbf{6}}$ Encuentre un número de tres dígitos que sea igual a la suma de los cubos de sus dígitos.

$\boxed{\textbf{7}}$ En la pizarra están escritos los números reales no nulos a, b y c, y también los números (a^2-b), (b^2-c) y (c^2-a). Determine como máximo cuántos números negativos puede haber entre los números escritos en la pizarra.

$\boxed{\textbf{8}}$ Un número entero positivo (expresado en el sistema decimal) es multiplicado por la suma de sus dígitos.

a) ¿Es posible que el resultado sea igual a $2\underbrace{00\cdots00}_{\text{20 ceros}}20$?

b) ¿Es posible que el resultado sea igual a $3\underbrace{00\cdots00}_{\text{20 ceros}}20$?

$\boxed{\textbf{9}}$ Determine si es posible ubicar en el plano 7 puntos distintos tales que, entre todos los triángulos que tienen sus vértices en esos puntos, más de 20 sean triángulos rectángulos.

$\boxed{\textbf{10}}$ Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $\angle BCD = \angle ADC \geq 90°$. Las bisectrices de los ángulos $\angle BAD$ y $\angle ABC$ se intersectan en M, que es un punto que pertenece al lado CD. Pruebe que M es punto medio de CD.

$\boxed{\textbf{11}}$ En un tablero de 300×300 se pintaron de negro algunas casillas, de tal forma que no hay dos casillas negras que compartan un lado o que compartan un vértice. Ana quiere recortar un L-trominó formado por tres casillas blancas del tablero. Luego, ella contó todas las formas en que puede recortar el L-trominó y dijo que se puede hacer exactamente de 102000 formas. Demuestre que Ana hizo el conteo de forma incorrecta.

Aclaración: Un L- trominó es una figura formada por 3 casillas que se obtiene al eliminar una casilla de un tablero de 2×2.

$\boxed{\textbf{12}}$ Sea ABC un triángulo equilátero de lado 12. En los lados AB, BC y CA se escogen los puntos M, N y P, respectivamente, tales que $AM = 8$, $BN = 6$ y $CP = 9$. Determine la medida del ángulo $\angle MNP$.

$\boxed{\textbf{13}}$ Determine todas las ternas (x, y, z) de enteros positivos tales que $xyz = 170170$ y

$$x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2.$$

$\boxed{\mathbf{14}}$ Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de los números enteros positivos de 7 dígitos cuyo producto de dígitos es mayor que cero y la suma de sus dígitos es 15. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de los números enteros positivos de 7 dígitos cuyo producto de dígitos es mayor que cero y la suma de sus dígitos es 48. Determine cuál de los dos conjuntos tiene más elementos.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Sean m y n enteros positivos tales que $n > m$. Demuestre la desigualdad

$$[m, n] + [m + 1, n + 1] > \frac{2mn}{\sqrt{n - m}},$$

donde $[r, s]$ denota al mínimo común múltiplo de r y s.