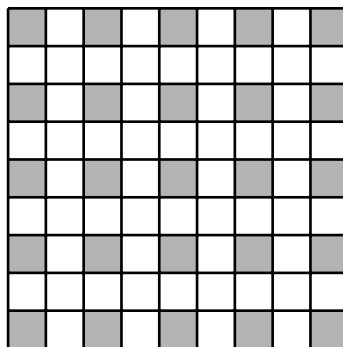


Indicaciones:

- La prueba tiene una duración de **4 horas** (como máximo).
 - En los primeros 45 minutos puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los **enunciados** de los problemas.
 - Puedes ir a explicar tus soluciones al jurado después de los 45 minutos iniciales.
 - Cada problema será calificado como resuelto o como no resuelto. Tienes **tres** intentos por cada problema.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- 5** El entero positivo N tiene al menos siete divisores positivos y los siete menores son 1, 2, 3, 4, 6, 8 y k , donde $8 < k$. Determine todos los valores que puede tomar k . Justifique su respuesta.
- 6** Sea $ABCD$ un paralelogramo tal que $AD = 2 \cdot AB$ y $\angle BAD$ es agudo. Sea P el pie de la perpendicular trazada desde C a la recta AB . Sea M el punto medio de AD . Demuestre que $\angle DMP = 3 \cdot \angle APM$.
- 7** Cada entero positivo se colorea de azul o rojo. Demuestre que para cualquier coloración es posible encontrar tres enteros positivos distintos a, b, c del mismo color tales que $ab = c^2$.
- 8** Algunas casillas de un tablero de 9×9 han sido pintadas de gris, tal como se muestra en la figura de abajo. Sobre las casillas de este tablero se van a colocar n caballos de ajedrez, de tal manera que cada casilla gris sea amenazada por al menos un caballo. ¿Cuál es el menor valor posible de n ?



Aclaración: Recuerde que en el ajedrez, los caballos se mueven dos casillas en horizontal y una en vertical o dos casillas en vertical y una en horizontal. Por ejemplo, en la siguiente figura, el caballo *C* amenaza a las ocho casillas que tienen un punto.

