

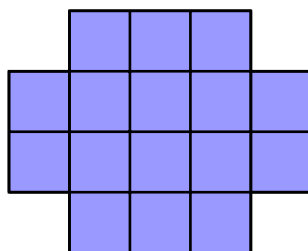
Indicaciones:

- La prueba tiene una duración de **2 horas y 15 minutos**, esto incluye el tiempo que les tome en enviar el correo electrónico.
- Cada equipo envía en un solo correo sus soluciones por medio de fotos. Cada equipo envía una solución por problema. Deben enviar sus soluciones al correo **e.binnaria@gmail.com** e indican en el título el nombre de su equipo. Por ejemplo: Pitágoras - Nivel 3.
- En la primera media hora pueden hacer preguntas por escrito al mismo correo acerca de los **enunciados** de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- Cada problema tiene un puntaje máximo de **10 puntos**.
- Resuelve los problemas propuestos justificando adecuadamente las soluciones.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.

1 Encuentre los cinco menores números capicúas que empiezan con los dígitos 2022, es decir, que son de la forma 2022...

Aclaración: Un número capicúa es aquel que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo, 101 y 4554 son capicúas.

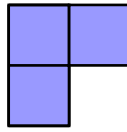
2 Haciendo cortes a lo largo de la cuadrícula, dividir la siguiente figura en tres partes, de tal forma que con esas partes se pueda armar un cuadrado:



3 Encuentre el menor número de tres dígitos \overline{abc} para el cual se cumple que $\overline{abc} + \overline{cba}$ es un número que tiene todos sus dígitos impares.

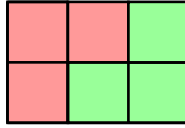
Aclaración: Los dígitos a, b, c no necesariamente son distintos. Los dígitos a y c son mayores que 0.

4 La siguiente ficha, formada por tres cuadraditos, es llamada L-triminó :

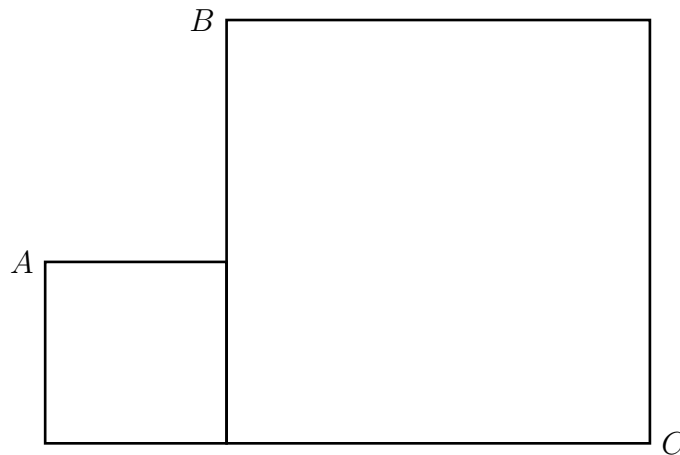


El triminó recto se puede rotar. ¿Es posible dividir un rectángulo de 4×12 en 16 L-triminós de tal forma que **no** haya dos L-triminós que formen un rectángulo de 2×3 o de 3×2 ?

Aclaración: En la siguiente figura se muestra dos L-triminós que **sí** forman un rectángulo de 2×3 :



- 5 En la figura se muestra dos cuadrados: uno de lado 3 y otro de lado 7. Además, se indican tres vértices A , B y C .



Calcule la distancia del punto C a la recta AB .

- 6 En los vértices de un polígono regular de 9 lados se escribieron los números $1, 2, \dots, 9$ en algún orden, un número en cada vértice, de tal forma que la suma de los números de tres vértices consecutivos cualesquiera sea menor o igual que k . Determine el menor valor de k para el cual eso es posible.
- 7 En un cuadrilátero convexo $ABCD$ se cumple que $\angle CBA = \angle DAB$, $BC = 1$ y $AD = 3$. Pruebe que la longitud del segmento CD es mayor que 2.
- 8 Se tiene 2021 lámparas enumeradas del 1 al 2021. Al inicio todas están apagadas y cada una tiene su propio interruptor. Una sucesión de 2021 personas va cambiando el estado de los interruptores (si un interruptor está encendido, lo apaga y si está apagado, lo enciende) de la siguiente forma:
- La primera persona cambia el estado de todos los interruptores.
 - La segunda persona cambia el estado de los interruptores $2, 4, 6, \dots, 2020$.
 - La tercera persona cambia el estado de los interruptores $3, 6, 9, \dots, 2019$.

- Así sucesivamente hasta que la última persona solo cambia el estado del interruptor 2021.

Determine cuántas lámparas quedaron encendidas al final.

9 *Concatenar* dos números naturales consiste en escribir un número a continuación de otro para obtener un nuevo número. Por ejemplo, al concatenar los números 231 y 308 obtenemos 231308. Encuentre dos números de seis dígitos cada uno tales que al concatenarlos se obtenga un número que sea divisible por el producto de esos dos números.

- 10** a) Se tiene 600 puntos igualmente espaciados alrededor de una circunferencia. Determine el menor entero positivo k que tiene la siguiente propiedad: si se escogen cualesquiera k puntos de los 600, se cumple que entre los puntos escogidos hay cuatro que son los vértices de un rectángulo.
- b) Se tiene 600 puntos igualmente espaciados alrededor de una circunferencia. Determine el menor entero positivo ℓ que tiene la siguiente propiedad: si se escogen cualesquiera ℓ puntos de los 600, se cumple que entre los puntos escogidos hay tres que son los vértices de un triángulo equilátero.