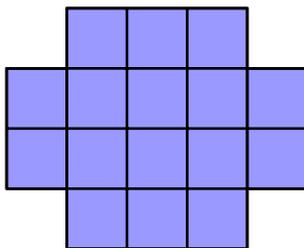


Indicaciones:

- La prueba tiene una duración de **2 horas y 15 minutos**, esto incluye el tiempo que les tome en enviar el correo electrónico.
- Cada equipo envía en un solo correo sus soluciones por medio de fotos. Cada equipo envía una solución por problema. Deben enviar sus soluciones al correo **e.binnaria@gmail.com** e indican en el título el nombre de su equipo. Por ejemplo: Gauss - Nivel 4.
- En la primera media hora pueden hacer preguntas por escrito al mismo correo acerca de los **enunciados** de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- Cada problema tiene un puntaje máximo de **10 puntos**.
- Resuelve los problemas propuestos justificando adecuadamente las soluciones.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.

- 1] Haciendo cortes a lo largo de la cuadrícula, dividir la siguiente figura en tres partes, de tal forma que con esas partes se pueda armar un cuadrado:



- 2] Encuentre el menor número de tres dígitos \overline{abc} para el cual se cumple que $\overline{abc} + \overline{cba}$ es un número que tiene todos sus dígitos impares.
- Aclaración:* Los dígitos a, b, c no necesariamente son distintos. Los dígitos a y c son mayores que 0.
- 3] En los vértices de un polígono regular de 9 lados se escribieron los números $1, 2, \dots, 9$ en algún orden, un número en cada vértice, de tal forma que la suma de los números de tres vértices consecutivos cualesquiera sea menor o igual que k . Determine el menor valor de k para el cual eso es posible.
- 4] En un cuadrilátero convexo $ABCD$ se que cumple que $\angle CBA = \angle DAB$, $BC = 1$ y $AD = 3$. Pruebe que la longitud del segmento CD es mayor que 2.

5 Un entero positivo n es llamado *triangular* si se puede expresar como

$$n = 1 + 2 + \cdots + m,$$

para algún entero positivo m . Los primeros números triangulares son 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... Halle el mayor entero positivo k para el cual se cumple que 2020 se puede expresar como la suma de k números triangulares diferentes dos a dos.

6 *Concatenar* dos números naturales consiste en escribir un número a continuación de otro para obtener un nuevo número. Por ejemplo, al concatenar los números 231 y 308 obtenemos 231308. Encuentre dos números de seis dígitos cada uno tales que al concatenarlos se obtenga un número que sea divisible por el producto de esos dos números.

7 Sean E y F puntos en los lados AB y AD de un cuadrilátero convexo $ABCD$, tales que EF es paralelo a BD . El segmento CE interseca a la diagonal BD en G , mientras que el segmento CF interseca a la diagonal BD en H . Pruebe que si $AGCH$ es un paralelogramo, entonces $ABCD$ también es un paralelogramo.

8 a) Se tiene 600 puntos igualmente espaciados alrededor de una circunferencia. Determine el menor entero positivo k que tiene la siguiente propiedad: si se escogen cualesquiera k puntos de los 600, se cumple que entre los puntos escogidos hay cuatro que son los vértices de un rectángulo.

b) Se tiene 600 puntos igualmente espaciados alrededor de una circunferencia. Determine el menor entero positivo ℓ que tiene la siguiente propiedad: si se escogen cualesquiera ℓ puntos de los 600, se cumple que entre los puntos escogidos hay tres que son los vértices de un triángulo equilátero.

9 Sea n un entero no negativo. Demuestre que los números $26^n + 2^n$ y 26^n tienen la misma cantidad de dígitos en su representación decimal.

10 Encuentre el número entero n para el cual se cumple que:

$$n \leq \sum_{k=2}^{2021} \sqrt{1 + \frac{2}{k^2}} < n + 1.$$