



II TORNEO DE JÓVENES MATEMÁTICOS

PRUEBA INDIVIDUAL DÍA 2 - RONDA INTERNACIONAL

Nivel 4

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración de **4 horas**.
- Lee con cuidado todos los enunciados. En los primeros 30 minutos puedes hacer preguntas, por medio del correo **e.binaria@gmail.com**, en caso tengas alguna duda acerca de los **enunciados** de los problemas.
- Puedes entrar a las salas a explicar tus soluciones al jurado después de los 30 minutos iniciales.
- Para entrar a una sala debes avisar al observador de tu nivel para que te coloque en la lista de espera.
- Debes entrar a la sala preparado para poder explicar tu solución, para eso usarás los métodos que creas conveniente.
- Cada problema será calificado como resuelto o como no resuelto. Tienes **tres** intentos por cada problema.
- Tienes en promedio 10 minutos para cada intento, si el jurado considera que en ese tiempo no has hecho un avance considerable puede decidir que el intento fue perdido. Por el contrario, si luego de ese tiempo sí has hecho un avance considerable el jurado puede dar más tiempo para que continúes.
- Cada vez que vas a una sala puedes explicar la solución de uno o más problemas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes, libros o páginas web.
- Esta prueba es **individual**.

1 En cada casilla de un tablero de 4×4 vive un duende. Cada duende es veraz (siempre dice la verdad) o mentiroso (siempre miente). Se sabe que hay al menos un duende veraz y al menos un duende mentiroso. En cierto momento cada duende dijo: “Entre mis vecinos hay la misma cantidad de veraces que de mentirosos”. ¿Cuántos duendes mentirosos hay en total?

Aclaración: dos duendes son vecinos si están ubicados en casillas que comparten un lado.

2 En la pizarra está escrito el número 123456789. Una *operación* consiste en escoger dos dígitos **adyacentes**, ambos mayores que 0, restar 1 a cada uno e intercambiarlos de lugar. Por ejemplo, con una operación (aplicada a los dígitos 4 y 5) podemos obtener 123436789 y con una operación más (aplicada a los dígitos 3 y 6) podemos obtener 123452789. ¿Cuál es el menor número que se puede obtener luego de algunas operaciones?

- 3** Tenemos dos polígonos convexos \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 que tienen diferentes cantidades de lados. Las medidas de los ángulos de esos polígonos cumplen lo siguiente:
- Todos los ángulos obtusos que aparecen en ambos polígonos tienen la misma medida.
 - Todos los ángulos agudos de \mathcal{P}_1 miden α
 - Todos los ángulos agudos de \mathcal{P}_2 miden 3α .
 - La cantidad de ángulos agudos de \mathcal{P}_1 es el doble de la cantidad de ángulos obtusos de \mathcal{P}_2 .
 - La cantidad de ángulos agudos de \mathcal{P}_2 es el doble de la cantidad de ángulos obtusos de \mathcal{P}_1 .

Determine todos los posibles valores de α .

- 4** Se tiene un conjunto de 50 colores. Determine si es posible pintar cada entero positivo con alguno de esos colores, de tal forma que, para todo entero positivo a , se cumple que los 50 números $a, 2a, 3a, \dots, 50a$ tienen colores distintos.