

CANGURO MATEMÁTICO 2023

QUINTO DE SECUNDARIA



INDICACIONES

- Las marcas en la hoja de respuestas se deben realizar, únicamente, con LÁPIZ.
- Escriba su apellido paterno, apellido materno y nombres con letras de imprenta y todas MAYÚSCULAS.
- Las marcas deben ser nítidas pintando el CÍRCULO completo (ver muestra en la hoja de respuestas).
- Marcar SOLAMENTE UNA de las opciones en cada problema.
- No debe hacer ninguna otra marca fuera de los espacios indicados (NO usar la hoja de respuestas para hacer cálculos en borrador).
- Duración: 1 hora y 30 minutos.**
- La calificación se realizará de la siguiente manera:

Pregunta	Correcta	Incorrecta	En blanco
De la 1 a la 10	+ 3 puntos	-3/4 puntos	0 puntos
De la 11 a la 20	+ 4 puntos	-1 puntos	0 puntos
De la 21 a la 30	+ 5 puntos	-5/4 puntos	0 puntos

Para evitar calificaciones negativas, la puntuación comienza con 30 puntos.

- 1 Encuentra el valor de

$$\frac{7777^2}{5555 \times 2222}$$

- (A) 1 (B) $\frac{7}{10}$ (C) $\frac{49}{10}$ (D) $\frac{77}{110}$ (E) 49

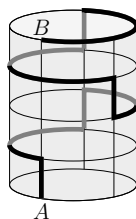
- 2 ¿Cuál es el dígito de las unidades del producto $(5^5 + 1)(5^{10} + 1)(5^{15} + 1)$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

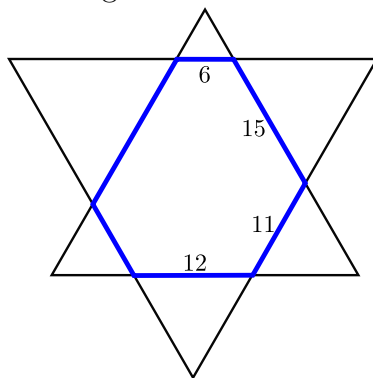
- 3 Julia lanzó cinco dados y obtuvo 19 puntos en total. ¿Cuál es la cantidad máxima de números seis que pudo haber sacado?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

- 4 Una lata cilíndrica tiene una altura de 15 cm y el perímetro de su base circular es de 30 cm. Una hormiga camina desde el punto A en la base hasta el punto B en el techo. Su camino es verticalmente hacia arriba u horizontalmente a lo largo de arcos circulares alrededor de la lata. Su ruta se muestra con una línea más gruesa (negra para la ruta en el frente de la lata y gris en la parte posterior). ¿Cuál es la longitud, en cm, del camino de la hormiga?

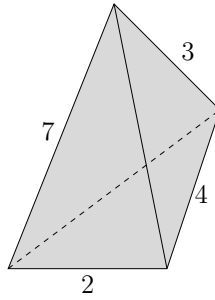


- (A) 45 (B) 55 (C) 60 (D) 65 (E) 75
- 5 Emilia tiene cuatro lapiceros de diferentes colores. Ella quiere colorear la bandera rectangular de tres franjas que se muestra en la figura de tal forma que cada franja sea de un solo color y además no haya dos franjas adyacentes del mismo color. ¿De cuántas maneras puede hacer esto?
- (A) 24 (B) 27 (C) 32 (D) 36 (E) 64
- 6 Decimos que un entero positivo n es *biprimo*, si tiene exactamente tres divisores positivos diferentes: 1, 2 y el mismo n . ¿Cuántos números enteros positivos biprimos diferentes hay?
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
- 7 Si x y y son enteros positivos tales que $x + 2y = 2^{10}$, determine cuántos valores distintos puede tomar x .
- (A) $2^9 - 1$ (B) 2^9 (C) $2^9 + 1$ (D) $2^9 + 2$ (E) 0
- 8 Dos triángulos equiláteros se juntan para formar un hexágono con sus lados opuestos paralelos. Conocemos la longitud de cuatro lados del hexágono, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el perímetro del hexágono?

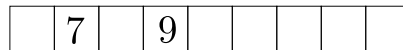


- (A) 64 (B) 66 (C) 68 (D) 70 (E) 72
- 9 Cinco números reales a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 tienen suma igual a S . Para cada $k, 1 \leq k \leq 5$, se cumple que $a_k = k + S$. ¿Cuál es el valor de S ?
- (A) $\frac{15}{4}$ (B) $-\frac{15}{4}$ (C) -15 (D) 15 (E) ninguna de las anteriores

- 10** Una pirámide triangular tiene aristas de longitud entera. Cuatro de estas longitudes son las que se muestran en la figura. ¿Cuál es la suma de las longitudes de las otras dos aristas?



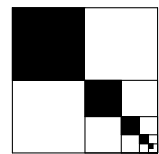
- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13
- 11** Para un entero positivo n , definimos $n!$ como el producto de todos los enteros desde 1 hasta n . Por ejemplo, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Halle la suma de los dígitos del entero positivo N que satisface la igualdad $N! = 6! \times 7!$.
- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 9
- 12** Cada uno de los números enteros del 1 al 9 debe colocarse en una de las 9 casillas de la figura de tal forma que tres números cualesquiera en casillas consecutivas sumen un múltiplo de 3. Los números 7 y 9 ya se han colocado. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden llenar las casillas restantes?



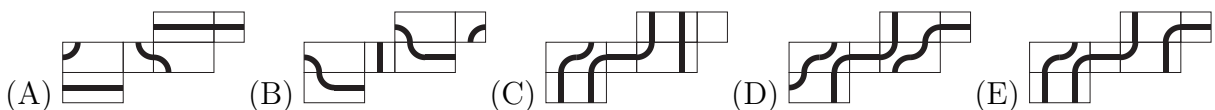
- (A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 24
- 13** El número 5^{56} se puede escribir en la forma n^n para algún entero n . ¿Cuál es el valor de n ?
- (A) 5^{30} (B) 5^6 (C) 5^5 (D) 30 (E) 11
- 14** Determine cuántas parejas (m, n) de números enteros cumplen la desigualdad

$$|2m - 2023| + |2n - m| \leq 1.$$

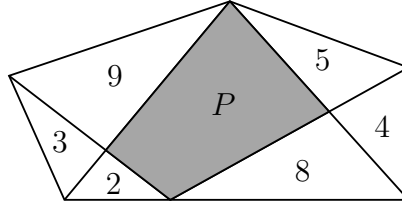
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
- 15** Un cuadrado de área 84 se divide en cuatro cuadrados. El cuadrado superior izquierdo es de color negro. El cuadrado inferior derecho se vuelve a dividir en cuatro cuadrados, y así sucesivamente. El proceso se repite un número infinito de veces. ¿Cuál es el área total que está coloreada de negro?



- (A) 24 (B) 28 (C) 31 (D) 35 (E) 42
- 16** Leonardo ha dibujado un camino cerrado sobre el borde de una caja rectangular. Luego de desdoblar la caja, ¿cuál de las siguientes imágenes podría representar su camino?



- 17** Un pentágono se divide en partes más pequeñas, como se muestra. Los números dentro de los triángulos indican sus áreas. ¿Cuál es el área P del cuadrilátero sombreado?



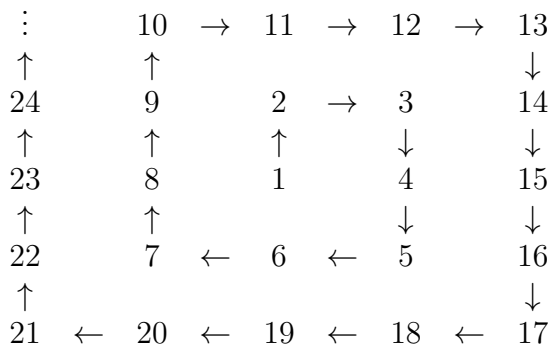
- (A) 15 (B) $\frac{31}{2}$ (C) 16 (D) 17 (E) 18
- 18** ¿Cuántos enteros positivos son divisores de $2^{20} \cdot 3^{23}$ pero no son divisores de $2^{10} \cdot 3^{20}$?
- (A) 13 (B) 30 (C) 273 (D) 460 (E) ninguna de las anteriores

- 19** Las funciones f y g , definidas en el conjunto de los números reales, cumplen que para todo número real x se dan las siguientes igualdades:

$$f(x) + 2g(1 - x) = x^2 \quad \text{y} \quad f(1 - x) - g(x) = x^2.$$

¿Cuál de las siguientes funciones es igual a f ?

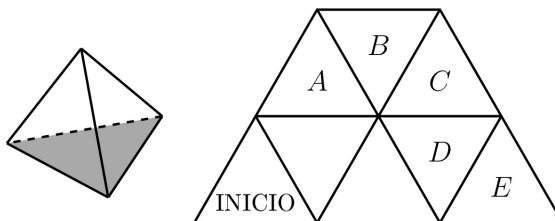
- (A) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ (B) $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ (C) $-x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$
- (D) $x^2 - 4x + 5$ (E) no existen tales funciones
- 20** Una espiral de números consecutivos es construida como muestra la figura, comenzando desde 1.



Cuando se continúa con el patrón de la espiral, ¿en qué disposición aparecerán los números 625, 626 y 627?

- (A) $\begin{array}{c} 627 \\ \uparrow \\ 626 \\ \uparrow \\ 625 \end{array}$ (B) $\begin{array}{ccc} 626 & \rightarrow & 627 \\ \uparrow & & \\ 625 & & \end{array}$
- (C) $625 \rightarrow 626 \rightarrow 627$ (D) $\begin{array}{ccc} 625 & \rightarrow & 626 \\ & & \downarrow \\ & & 627 \end{array}$
- (E) $\begin{array}{c} 625 \\ \downarrow \\ 626 \\ \downarrow \\ 627 \end{array}$

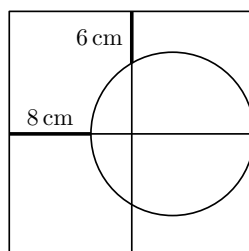
- 21** Hay 23 animales sentados en fila. Cada animal es un castor o un canguro. Cada uno de los animales tiene al menos un vecino que es un canguro. ¿Cuál es el mayor número posible de castores en la fila?
- (A) 7 (B) 8 (C) 10 (D) 11 (E) 12
- 22** Las gráficas de las funciones $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ pasan todas por el mismo punto, sin importar qué valor de a se elija. ¿Cuál es la suma de las coordenadas de dicho punto?
- (A) 2 (B) 4 (C) 7 (D) 8 (E) ninguna de las anteriores
- 23** En una competencia de alpinismo, 13 escaladores compiten en tres categorías. La puntuación de cada competidor es igual al producto de sus clasificaciones en las tres categorías. Por ejemplo, si uno es 4°, 3° y 6°, su puntaje final es $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$. Cuanto mayor sea su puntuación, menor será su clasificación general. Alberto ocupa el primer lugar en dos de las categorías. ¿Cuál es la clasificación general más baja posible de Alberto?
- (A) 2° (B) 3° (C) 4° (D) 5° (E) 6°
- 24** Un bloque en forma de tetraedro regular tiene una cara sombreada. La cara sombreada del bloque se coloca sobre el tablero en el triángulo etiquetado como INICIO. Luego, el bloque se hace rodar de un triángulo al siguiente girándolo sobre un borde. ¿En cuál de los triángulos se parará el bloque por primera vez sobre su cara sombreada?



- (A) A (B) B (C) C (D) D (E) E
- 25** Parte del polinomio de quinto grado que se muestra no se puede ver debido a una mancha de tinta. Sabemos que las cinco raíces del polinomio son números enteros. ¿Cuál es la máxima potencia de $x - 1$ que puede dividir al polinomio?

$$x^5 - 11x^4 + \text{mancha de tinta} - 7$$

- (A) $(x - 1)^1$ (B) $(x - 1)^2$ (C) $(x - 1)^3$ (D) $(x - 1)^4$ (E) $(x - 1)^5$
- 26** El cuadrado grande de la figura se divide en cuatro cuadrados más pequeños. El círculo es tangente al lado derecho del cuadrado grande en su punto medio. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado grande?



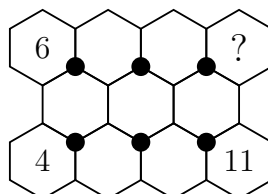
- (A) 18 cm (B) 20 cm (C) 24 cm (D) 28 cm (E) 30 cm

- 27** ¿Cuál es el máximo común divisor de todos los números de la forma

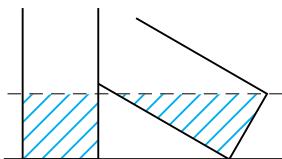
$$n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3,$$

donde n es un número entero positivo?

- (A) $2^9 3^3$ (B) $2^3 3^3 5^3$ (C) $2^6 3^3 5^3$ (D) $2^8 3^2 5^3$ (E) $2^9 3^3 5^3$
- 28** Los números del 1 al 11 deben escribirse en los hexágonos de tal forma que la suma de los tres números alrededor de cada uno de los seis puntos negros sea la misma. Tres de los números ya han sido escritos. ¿Qué número se escribirá en el hexágono con un signo de interrogación?



- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9
- 29** Dos tanques de agua cilíndricos idénticos contienen la misma cantidad de agua. Un cilindro está de pie y el otro está apoyado contra él, y el nivel del agua en cada uno de ellos es el mismo que en la imagen. La parte inferior de cada uno de los cilindros es un círculo con área $3\pi m^2$. ¿Cuánta agua contiene cada tanque?



- (A) $3\sqrt{3}\pi m^3$ (B) $6\pi m^3$
 (C) $9\pi m^3$ (D) $\frac{3\pi}{4} m^3$
 (E) no se puede determinar
- 30** El producto de seis enteros positivos consecutivos es un número de 12 dígitos de la forma

$$\overline{abb\ cdd\ cdd\ abb}$$

donde los dígitos a , b , c y d son cuatro números enteros consecutivos, en algún orden. ¿Cuál es el valor del dígito d ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Perú, abril de 2023.

En nuestro Facebook colgaremos algunas fotos de todos los colegios participantes en el Canguro Matemático 2023.

¡MUCHAS GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN!