XI CONCURSO DE MATEMÁTICA BINARIA 2023 - Segunda Etapa

Cuarto y Quinto de Secundaria

Parte A.
De los problemas del A1 al A10 escoge una alternativa. Solo una es la correcta.

A1 Encuentre el menor número de cuatro dígitos tal que la suma de sus dígitos es 7 y ninguno de ellos es igual a 1. Dé como respuesta la suma de los cuadrados de sus dígitos.

(A) 17 (B) 13 (C) 19 (D) 23 (E) 29

A2 En un colegio hay un salón en el que todos los estudiantes tienen la misma edad, a excepción de 3 de ellos: 2 tienen 1 año más y 1 tiene un año menos. Se sabe también que la suma de las edades de todos los estudiantes de ese salón es 208. ¿Cuántos estudiantes hay en ese salón si en el colegio todos los estudiantes tienen entre 7 y 16 años?

(A) 17 (B) 11 (C) 23 (D) 21 (E) 19

A3 El número de cuatro dígitos $\overline{aaab}$ es múltiplo de 12 y el número de cuatro dígitos $\overline{bbba}$ es múltiplo de 9. Entonces el número $\overline{1ba}$ es múltiplo de ...

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 13 (E) 7

A4 Sea ABC un triángulo acutángulo cuya altura es AH y BM es una mediana. Si $\angle BAH = 34°$ y $AH = BM$, calcule la medida de $\angle ABM$.

(A) $26°$ (B) $17°$ (C) $32°$ (D) $34°$ (E) $28°$

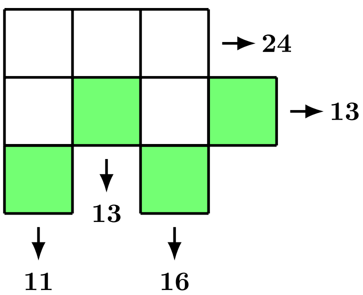
A5 Los números reales p y q cumplen que las siguientes ecuaciones cuadráticas:

$$x^2 - px + q = 0$$
$$x^2 - qx + p = 0$$

tienen exactamente una raíz en común. Encuentre el valor de dicha raíz.

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1 (E) -2

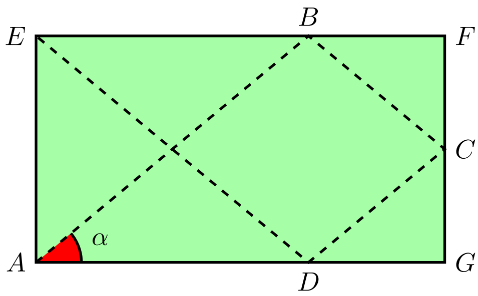
A6 Distribuya los números del 1 al 9, uno en cada casilla, de tal manera que se cumplan las sumas indicadas por las flechas:



Dé como respuesta la suma de los números que deben ser escritos en las cuatro casillas pintadas.

(A) 19 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 14

A7 Se muestra una mesa de billar de dimensiones $AE = 5$ y $EF = 9$. Una bola empezó su recorrido en el punto A y luego de rebotar en los puntos B, C y D, llegó al punto E. Calcule el valor de $\tan\alpha$.



Aclaración: considere que cada rebote es completamente elástico, es decir, el ángulo de llegada es igual al ángulo de salida.

(A) $\frac{6}{5}$ (B) 1 (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{5}{4}$

A8 Sea p el mayor número primo para el cual se cumple que cada uno de los dos números $p-12$ y $p+12$ tiene exactamente 3 divisores positivos. Determine el resto de dividir p entre 5.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

A9 Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Si se cumple que $a^3 + b^3 = c^3$, podemos asegurar que el triángulo es ...

(A) escaleno (B) isósceles (C) rectángulo
(D) acutángulo (E) obtusángulo

A10 Sea ACB un triángulo tal que $\angle ACB = 90°$. En el lado AC se escoge un punto E y en el lado AB se escoge un punto D de tal manera que el punto medio del segmento EB pertenece a CD. Calcule la longitud de BC si $AE = 7$, $EC = 2$ y $AD = 9$.

(A) 6 (B) $2\sqrt{10}$ (C) 7 (D) $3\sqrt{7}$ (E) $4\sqrt{5}$

Parte B.

De los problemas del B1 al B5 escribe de forma nítida tu respuesta en el cuadro correspondiente y marca los cuatro dígitos en la hoja de respuesta. Si tu respuesta es, por ejemplo, 102 tienes que marcar 0102 y si tu respuesta es 7 tienes que marcar 0007.

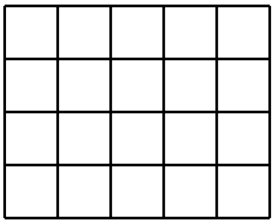
B1 Sean a, b y c números reales tales que

$$\begin{aligned} a+b+c &= 24, \\ 2(ab+bc+ca) &= abc. \end{aligned}$$

Calcule el valor de

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}.$$

B2 ¿De cuántas formas se puede pintar de negro tres casillas del siguiente tablero si en cada columna debe haber como máximo una casilla negra?



Aclaración: el tablero mostrado tiene 4 filas (horizontales) y 5 columnas (verticales).

B3 Encuentra el menor entero positivo N para el cual la ecuación

$$\operatorname{mcd}(n+5, 2n+1) + \operatorname{mcm}(n+5, 2n+1) = N$$

tiene al menos dos soluciones en los enteros positivos.

Aclaración: mcd denota al máximo común divisor y mcm denota al mínimo común múltiplo.

B4 Sea $ABCDEFG$ un heptágono tal que

$$AB = BC = CD = DE = EF = FG$$

y $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = \angle EFG = 144^\circ$.

Si se sabe que $AB \cdot AG = 1$ y el área del heptágono $ABCDEFG$ se puede expresar como $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros positivos coprimos, calcule el valor de $a+b$.

B5 Se tiene un conjunto formado por 23 enteros positivos tales que no es posible encontrar dos de ellos cuyo cociente sea un número entero. Un elemento del conjunto es llamado *bueno* si su cuadrado es divisible por el producto de algunos otros dos elementos del conjunto. Determine cuántos elementos del conjunto pueden ser buenos, como máximo.