IV Torneo de Jóvenes Matemáticos

Prueba por equipos - Ronda Internacional

Nivel 3

Indicaciones:

- En los primeros 20 minutos los integrantes del grupo pueden intentar los problemas y conversar entre ellos. En ese tiempo pueden preguntar al jurado si tienen dudas acerca de los enunciados.
- Al finalizar los 20 primeros minutos los integrantes deben entregar una hoja con la lista de quiénes son los que resolverán cada problema. Los problemas se deben repartir de tal forma que cada integrante resuelva por lo menos 1 problema.
- Luego tienen 1 hora y 20 minutos para escribir las soluciones de los problemas asignados. Cada integrante solo resuelve los problemas que les tocó en la lista.
- Cada problema tiene un puntaje máximo de **10 puntos** (se otorgarán puntos parciales). El puntaje del equipo se define como la suma de los puntos obtenidos por el equipo, dividido por la cantidad de integrantes.
- Cada integrante debe justificar adecuadamente las soluciones.

1 Encuentre los dos menores números *capicúas* que son múltiplos de 36.

Aclaración: un número es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

2 ¿Existe un número de cuatro dígitos tal que el producto de sus dígitos sea igual a 25 veces la suma de sus dígitos?

3 En una fila hay 20 números enteros. ¿Puede ocurrir que la suma de cualesquiera tres números adyacentes sea positiva y que la suma de todos los números sea negativa?

4 Se tiene algunos números reales positivos, no necesariamente distintos, cuya suma es 1. ¿Es posible que la suma de sus cuadrados sea menor que $\dfrac{1}{1000}$?

5 Usando como piezas triángulos de lados 3, 4 y 5, muestre que es posible construir un pentágono cuyos lados midan 4, 10, 12, 16 y 22, en algún orden, de tal manera que las piezas no se superpongan y que cubran completamente el pentágono.

6 Se dibujan los cuadrados $ABCD$ y $ABEF$ ($C \neq E$). En la diagonal AE se escoge el punto K tal que $DK = AE$. Calcule la medida del ángulo $\angle ADK$.

$\boxed{\textbf{7}}$ En las casillas de un tablero de 10×10 se escriben los números $1, 2, 3, \ldots, 100$, sin repetir y en cualquier orden. Una operación consiste en escoger dos casillas e intercambiar los números que están escritos en ellas. Demuestre que es posible realizar 35 operaciones o menos, de tal forma que se consiga que, para dos casillas vecinas cualesquiera, la suma de sus números es compuesto.

Aclaración. Dos casillas son vecinas si comparten un lado en común.

$\boxed{\textbf{8}}$ Encuentra todos los números n de tres dígitos tales que

$$n = 6p(n) + s(n),$$

donde $s(n)$ es la suma de los dígitos de n y $p(n)$ es el producto de los dígitos de n.

$\boxed{\textbf{9}}$ ¿Es posible distribuir 63 reinas del ajedrez en un tablero de 63×63 de tal manera que todas esas piezas estén dentro del subtablero de 33×33 de la esquina inferior izquierda y en el subtablero de 30×30 de la esquina superior derecha, y que no haya dos reinas que se ataquen?

$\boxed{\textbf{10}}$ Sean a y b enteros positivos tales que $a - b = 5b^2 - 4a^2 > 0$. Demuestre que $a - b$ es un cuadrado perfecto.