IV Torneo de Jóvenes Matemáticos

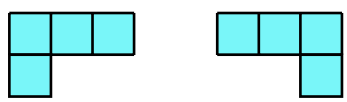
Segunda etapa, Nivel 4

3 de diciembre de 2022

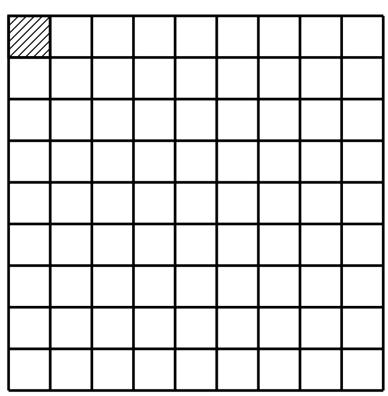
Indicaciones:

- La prueba tiene una duración de **3 horas** y cada problema tiene un valor máximo de **20 puntos**.
- En los primeros 30 minutos puedes hacer preguntas, en caso tengas alguna duda acerca de los **enunciados** de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- En cada página escribe tu nombre completo y nivel. Además, coloca el número de problema y página.
- Resuelve los problemas propuestos justificando adecuadamente cada paso.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- **Al participar en esta etapa te comprometes a no divulgar los problemas hasta el día 15 de diciembre.**

$\boxed{1}$ Las siguientes fichas, formadas por cuadraditos unitarios, son llamadas L-tetraminós:



Los L-tetraminós se pueden rotar. Demuestre que, al quitar una casilla de la esquina de un tablero de 9×9, lo que queda del tablero se puede cubrir completamente con L-tetraminós, sin que se superpongan y sin que sobresalgan del tablero.



$\boxed{2}$ Sea ABC un triángulo tal que $AB = BC$ en el que se ha trazado la bisectriz interior AD (D pertenece al lado BC). Calcule las medidas de los ángulos del triángulo ABC si se sabe que la distancia de A a la recta BC es igual a la mitad de la longitud del lado AD.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Demuestre que $x = 1$ es la única solución real de la ecuación

$$x^{22} + \frac{1}{x^{22}} = 1 + x^{25}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Un polígono regular de 2022 lados quedó dividido en triángulos al trazar algunas diagonales, de tal manera que no hay dos de ellas que se corten en el interior del polígono (sí puede haber diagonales trazadas que compartan un extremo). Si de todos estos triángulos, la cantidad de triángulos obtusángulos es k, determine todos los posibles valores de k.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Demuestre que el mínimo común múltiplo de cualesquiera seis enteros positivos consecutivos **no** es un cuadrado perfecto.