



IV TORNEO DE JÓVENES MATEMÁTICOS

PRUEBA INDIVIDUAL DÍA 2 - RONDA INTERNACIONAL

Nivel 2

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración de **4 horas** (como máximo).
- En los primeros 30 minutos puedes hacer preguntas al jurado en caso tengas alguna duda acerca de los **enunciados** de los problemas. No puedes explicar tus soluciones al jurado dentro de los 30 minutos iniciales.
- Cada problema será calificado como resuelto o como no resuelto. Tienes **tres** intentos por cada problema.
- Tienes en promedio 10 minutos para cada intento, si el jurado considera que en ese tiempo no has hecho un avance considerable puede decidir que el intento fue perdido. Por el contrario, si luego de ese tiempo sí has hecho un avance considerable el jurado puede dar más tiempo para que continúes explicando.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.

1 Sea $ABCD$ un cuadrado. En los lados BC y CD se escogen los puntos M y N , respectivamente, tales que $\angle BAM = \angle MAN = \angle NAD$. En el triángulo AMN se traza la altura MP (P pertenece al segmento AN). Calcule la medida del ángulo $\angle PDN$.

2 Un número es *actual* si el dígito de las unidades es igual a la suma de todos los otros dígitos y el cuadrado del dígito de las unidades es igual a la suma de los cubos de todos los otros dígitos. Por ejemplo, 2024 es actual porque $4 = 2 + 0 + 2$ y $4^2 = 2^3 + 0^3 + 2^3$.

¿Es cierto que, para todo entero positivo n que no es múltiplo de 10, existe un múltiplo de n que es actual?

3 Sean a y b enteros positivos tales que $\text{mcd}(2a, 3b) = \text{mcd}(3a, 2b)$, demuestre que $\text{mcd}(3a, 4b) = \text{mcd}(4a, 3b)$.

Aclaración: $\text{mcd}(m, n)$ es el máximo común divisor de m y n . Por ejemplo, $\text{mcd}(6, 9) = 3$ y $\text{mcd}(4, 5) = 1$.

4 En el plano se han marcado $n + 13$ puntos entre los cuales no hay tres que pertenezcan a una misma recta, donde n puntos se pintaron de rojo y 13 de azul. Luego, se trazaron algunos segmentos cuyos extremos son puntos marcados. Si de cada punto rojo salen exactamente n segmentos y de cada punto azul salen exactamente 13 segmentos, determine el mayor valor de n para el cual esta situación es posible.