

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración de **4 horas** (como máximo).
- En los primeros 30 minutos puedes hacer preguntas al jurado en caso tengas alguna duda acerca de los **enunciados** de los problemas. No puedes explicar tus soluciones al jurado dentro de los 30 minutos iniciales.
- Cada problema será calificado como resuelto o como no resuelto. Tienes **tres** intentos por cada problema.
- Tienes en promedio 10 minutos para cada intento, si el jurado considera que en ese tiempo no has hecho un avance considerable puede decidir que el intento fue perdido. Por el contrario, si luego de ese tiempo sí has hecho un avance considerable el jurado puede dar más tiempo para que continúes explicando.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.

**1** Daniel y Tomás juegan a escoger enteros positivos  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Primero, Daniel escoge el valor de  $a$ , luego Tomás escoge el valor de  $b$  y Daniel escoge el valor de  $c$ , finalmente, calculan el valor de  $3abc + ab + ac + bc + c$ . Daniel gana si este número es impar y Tomás gana si este número es par. Explique si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora o no, y en caso de tenerla describir dicha estrategia.

**2** Sea  $ABC$  un triángulo con  $AC > AB$ . Sea  $\ell$  la bisectriz interior del ángulo  $\angle BAC$ , la cual interseca al lado  $BC$  en  $X$ . En el segmento  $CX$  se escoge un punto  $D$ . El punto  $E$  se escoge de tal manera que el punto medio de  $DE$  pertenece a  $\ell$  y  $DE$  es perpendicular a  $\ell$ . La recta  $BE$  interseca a  $\ell$  en  $P$  y la recta  $PD$  interseca a  $AC$  en  $Q$ . Si la recta  $BE$  es tangente a la circunferencia inscrita del triángulo  $ABC$ , demuestre que el triángulo  $CDQ$  es isósceles.

**3** En el plano se han marcado  $n + 13$  puntos entre los cuales no hay tres que pertenezcan a una misma recta, donde  $n$  puntos se pintaron de rojo y 13 de azul. Luego, se trazaron algunos segmentos cuyos extremos son puntos marcados. Si de cada punto rojo salen exactamente  $n$  segmentos y de cada punto azul salen exactamente 13 segmentos, determine el mayor valor de  $n$  para el cual esta situación es posible.

**4** Definimos la sucesión  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  de la siguiente manera:  $a_0 = 0$  y, para todo entero positivo  $n$ :

$$a_n = a_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + \left\lfloor \frac{2n+1}{3} \right\rfloor.$$

Halle todos los  $n$  para los cuales se cumple que  $a_n = n$ .

*Aclaración:* para cada número real  $x$ , el símbolo  $\lfloor x \rfloor$  denota al mayor número entero que es menor o igual que  $x$ . Por ejemplo,  $\lfloor 0 \rfloor = 0$ ,  $\lfloor 2 \rfloor = 2$ ,  $\lfloor \frac{5}{3} \rfloor = 1$  y  $\lfloor \sqrt{5} \rfloor = 2$ .