IV Torneo de Jóvenes Matemáticos

Prueba individual día 2 - Ronda Internacional

Nivel 4

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración de **4 horas** (como máximo).
- En los primeros 30 minutos puedes hacer preguntas al jurado en caso tengas alguna duda acerca de los **enunciados** de los problemas. No puedes explicar tus soluciones al jurado dentro de los 30 minutos iniciales.
- Cada problema será calificado como resuelto o como no resuelto. Tienes **tres** intentos por cada problema.
- Tienes en promedio 10 minutos para cada intento, si el jurado considera que en ese tiempo no has hecho un avance considerable puede decidir que el intento fue perdido. Por el contrario, si luego de ese tiempo sí has hecho un avance considerable el jurado puede dar más tiempo para que continues explicando.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.

1 Daniel y Tomás juegan a escoger enteros positivos a, b y c. Primero, Daniel escoge el valor de a, luego Tomás escoge el valor de b y Daniel escoge el valor de c, finalmente, calculan el valor de $3abc + ab + ac + bc + c$. Daniel gana si este número es impar y Tomás gana si este número es par. Explique si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora o no, y en caso de tenerla describir dicha estrategia.

2 Encuentre todos los polinomios $P(x)$ de coeficientes reales, tales que:

$$P(x+y) = P(x) + P(y) + xy(x+y),$$

para todos los números reales x y y.

3 Sea ABC un triángulo cuya circunferencia inscrita es tangente a los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. Sea P un punto tal que A y P están en el mismo semiplano determinado por la recta EF y, además, se cumple que $\angle PFE = \angle ACB$ y $\angle PEF = \angle ABC$. Demuestre que PD es perpendicular a BC.

4 Definimos la sucesión $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ de la siguiente manera: $a_0 = 0$ y, para todo entero positivo n:

$$a_n = a_{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} + \left\lfloor \frac{2n+1}{3} \right\rfloor.$$

Demuestre que, para todo entero positivo k, existe un entero positivo n tal que a_n es múltiplo de k.

Aclaración: para cada número real x, el símbolo $\lfloor x \rfloor$ denota al mayor número entero que es menor o igual que x. Por ejemplo, $\lfloor 0 \rfloor = 0$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = 1$ y $\left\lfloor \sqrt{5} \right\rfloor = 2$.